

Calculer, pour tout entier n , la dérivée n -ième de $x \mapsto \sqrt{x}$.

Analyse

Quelques calculs de dérivées successives permettent de « voir » le mécanisme. On en tire une expression générale que l'on cherchera à simplifier.

Résolution

Posons, pour tout réel x strictement positif : $f(x) = \sqrt{x}$.

On a bien sûr : $f^{(0)}(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ et $f^{(1)}(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1}$.

Il vient : $f^{(2)}(x) = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}-1\right) x^{\frac{1}{2}-1-1} = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}-1\right) x^{\frac{1}{2}-2}$.

Puis : $f^{(3)}(x) = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}-1\right) \times \left(\frac{1}{2}-2\right) x^{\frac{1}{2}-2-1} = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}-1\right) \times \left(\frac{1}{2}-2\right) x^{\frac{1}{2}-3}$.

Le calcul suggère de poser, pour n entier naturel non nul :

$$f^{(n)}(x) = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}-1\right) \times \left(\frac{1}{2}-2\right) \times \dots \times \left(\frac{1}{2}-(n-1)\right) x^{\frac{1}{2}-n}$$

Nous allons démontrer cette formule par récurrence.

Elle est exacte pour $n=1$ et $n=2$.

Supposons qu'elle soit vraie au rang n .

Au rang $n+1$, on a :

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= (f^{(n)})'(x) \\ &= \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}-1\right) \times \left(\frac{1}{2}-2\right) \times \dots \times \left(\frac{1}{2}-(n-1)\right) \times \left(\frac{1}{2}-n\right) x^{\frac{1}{2}-n-1} \\ &= \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}-1\right) \times \left(\frac{1}{2}-2\right) \times \dots \times \left(\frac{1}{2}-(n-1)\right) \times \left(\frac{1}{2}-((n+1)-1)\right) x^{\frac{1}{2}-(n+1)} \end{aligned}$$

La formule est ainsi vérifiée au rang $n+1$.

Nous allons maintenant en donner une expression plus simple.

Posons, pour tout entier naturel non nul : $u_n = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2} - 1\right) \times \left(\frac{1}{2} - 2\right) \times \dots \times \left(\frac{1}{2} - (n-1)\right)$.

Ce produit comporte n facteurs et on a :

$$\begin{aligned}u_n &= \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2} - 1\right) \times \left(\frac{1}{2} - 2\right) \times \dots \times \left(\frac{1}{2} - (n-1)\right) \\&= \frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{2}\right) \times \left(-\frac{3}{2}\right) \times \left(-\frac{5}{2}\right) \times \dots \times \left(-\frac{2n-3}{2}\right) \\&= (-1)^{n-1} \frac{1 \times 3 \times 5 \times \dots \times (2n-3)}{2^n} \\&= (-1)^{n-1} \frac{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times \dots \times (2n-4) \times (2n-3) \times (2n-2)}{2^n \times 2 \times 4 \times \dots \times (2n-2)} \\&= (-1)^{n-1} \frac{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times \dots \times (2n-2) \times (2n-1) \times 2n}{2^n \times 2^{n-1} \times 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times (n-1)} \times \frac{1}{(2n-1) \times 2n} \\&= \frac{(-1)^{n-1} (2n)!}{2n-1 \ 2^{2n} \times n!}\end{aligned}$$

On constate que cette formule est également valable pour $n = 0$ (elle fournit $u_0 = 1$).

Finalement :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}^{+*}, f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1} (2n)!}{2n-1 \ 2^{2n} \times n!} x^{\frac{1}{2}-n}$$

Résultat final

Pour tout x réel strictement positif, si on pose $f(x) = \sqrt{x}$, il vient :

$$\forall n \in \mathbb{N}, f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1} (2n)!}{2n-1 \ 2^{2n} \times n!} x^{\frac{1}{2}-n}$$