

On considère une fonction f définie et dérivable sur un intervalle $[a; b]$ ($a \neq b$). On suppose que l'on a : $f(a) = f(b) = 0$.

Soit alors un réel c n'appartenant pas à $[a; b]$.

Montrer qu'il existe une tangente à la courbe représentative de f passant par le point de coordonnées $(c; 0)$.

Analyse

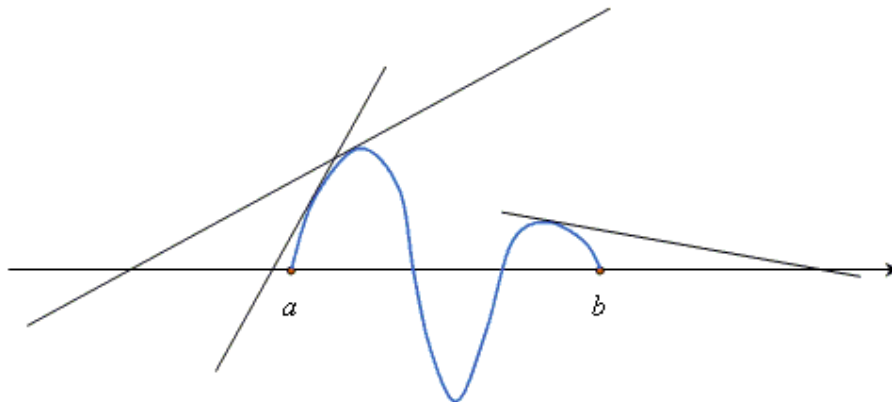
Ne pas hésiter à faire un rapide dessin pour se fixer un peu les idées ... Les hypothèses « f dérivable » et « $f(a) = f(b) = 0$ » nous conduisent à penser au théorème de Rolle. La question demeure de savoir à quelle fonction l'appliquer ...

Résolution

Dans un premier temps, soulignons que le résultat est immédiat si f est la fonction nulle !

Nous supposons donc, à partir de maintenant, que f n'est pas la fonction nulle.

Donnons un rapide dessin pour fixer les idées :



Considérons alors x_0 dans l'intervalle $]a; b[$.

Au point $(x_0, f(x_0))$ une équation de la tangente s'écrit classiquement :

$$y = f'(x_0) \times (x - x_0) + f(x_0)$$

Dire qu'une telle tangente passe par le point $(c; 0)$ équivaut à écrire que les coordonnées de ce point vérifie l'équation ci-dessus :

$$f'(x_0) \times (c - x_0) + f(x_0) = 0$$

Ou :

$$f'(x_0) \times (x_0 - c) - f(x_0) = 0$$

Soit encore, x_0 étant différent de c :

$$\frac{f'(x_0) \times (x_0 - c) - f(x_0)}{(x_0 - c)^2} = 0$$

Le membre de gauche n'est rien d'autre que la valeur prise en x_0 par la dérivée de la fonction :

$$\varphi_c : x \mapsto \frac{f(x)}{x - c}$$

La fonction φ_c est en effet définie sur $[a; b]$ comme f et dérivable sur cet intervalle comme rapport de deux fonctions dérivables sur cet intervalle. Plus formellement, on a :

$$\forall x \in [a, b], \varphi_c'(x) = \frac{f'(x) \times (x - c) - f(x)}{(x - c)^2}$$

Comme $f(a) = f(b) = 0$, on a facilement $\varphi_c(a) = \varphi_c(b) = 0$.

Comme, de plus, φ_c est dérivable sur $]a; b[$, le théorème de Rolle nous permet d'affirmer qu'il existe un réel d dans $]a; b[$ tel que $\varphi_c'(d) = 0$. On a donc : $f'(d) \times (c - d) + f(d) = 0$. En d'autres termes, la tangente à la courbe représentative de la fonction f au point $(d, f(d))$ passe par le point $(c, 0)$. Le résultat est ainsi établi.