On considère une fonction *f* définie et deux fois dérivable sur un intervalle $\left[a\,;b\right]$ ($a \neq b$). Soit *c* appartenant à $\left]a\,;b\right[$.

1. On suppose que l'on a ici : $f(a) = f(b) = 0$.

   En considérant la fonction *g* définie sur $\left[a\,;b\right]$ par :

   $$g : x \mapsto f(x) + \lambda(x-a)(b-x)$$

   où λ est tel que $g(c) = 0$, montrer qu'il existe un réel *d* dans $\left]a\,;b\right[$ tel que :

   $$f(c) = -\frac{(c-a)(b-c)}{2} f''(d)$$

2. On se place maintenant dans le cas général où $f(a)$ et $f(b)$ sont quelconques.
   Montrer qu'il existe un réel *d* dans $\left]a\,;b\right[$ tel que :

   $$f(c) = \frac{b-c}{b-a} f(a) + \frac{c-a}{b-a} f(b) - \frac{(c-a)(b-c)}{2} f''(d)$$

3. Donner une interprétation graphique du résultat obtenu à la question précédente.

Analyse

La première question nous conduit assez « naturellement » à utiliser le théorème de Rolle au regard des hypothèses fournies. La généralisation de la deuxième est facilitée si on s'efforce de reprendre la démarche de la première question.

Résolution

1. La fonction *g* est, comme la fonction *f*, définie sur l'intervalle $\left[a\,;b\right]$. On a facilement, d'après les hypothèses sur la fonction *f* : $g(a) = g(b) = 0$. On note, par ailleurs, que la

fonction *g* est obtenue en ajoutant à la fonction *f* une fonction polynôme. La fonction *f* étant dérivable sur $[a\,;b]$, il en va donc de même pour la fonction *g*.

Appliquons alors le théorème de Rolle à la fonction *g* sur les intervalles $[a\,;c]$ et $[c\,;b]$: on peut affirmer l'existence :

- D'un réel d_1 dans $]a\,;c[$ tel que $g'(d_1)=0$;
- D'un réel d_2 dans $]c\,;b[$ tel que $g'(d_2)=0$.

Puisque la fonction *f* est deux fois dérivable sur l'intervalle $[a\,;b]$, il en va de même pour la fonction *g* sur ce même intervalle. En particulier, sur l'intervalle $[d_1\,;d_2]\subset[a\,;b]$, la fonction *g* est dérivable et vérifie $g'(d_1)=g'(d_2)=0$.
On en déduit, toujours en utilisant le théorème de Rolle, l'existence d'un réel *d* dans l'intervalle $]d_1\,;d_2[$ tel que : $g''(d)=0$.
Or, à partir de $g(x)=f(x)+\lambda(x-a)(b-x)$, on a facilement $g''(x)=f''(x)-2\lambda$.
$g''(d)=0$ équivaut donc à : $f''(d)=2\lambda$, soit : $\lambda=\frac{1}{2}f''(d)$.

La condition $g(c)=0$ équivaut à : $f(c)+\lambda(c-a)(b-c)=0$, soit : $f(c)=-(c-a)(b-c)\lambda$. On tire alors de ce qui précède le résultat demandé :

$$\boxed{f(c)=-\frac{(c-a)(b-c)}{2}f''(d)}$$

2. A la question précédente, c'est l'application « en deux temps » du théorème de Rolle (appliqué à une fonction *g* judicieusement construite) qui nous a permis de conclure.
Considérons encore une fonction g définie sur $[a\,;b]$ par :

$$g(x)=f(x)+\lambda(x-a)(b-x)$$

Pour l'instant, le choix d'une valeur judicieuse de λ n'est pas … immédiat.
En revanche, comme nous perdons l'hypothèse $f(a)=f(b)=0$, on obtient $g(a)=f(a)$ et $g(b)=f(b)$; nous ne pouvons plus appliquer le théorème de Rolle.
Le théorème des accroissements finis appliqués à la fonction *g* sur les intervalles $[a\,;c]$ et $[c\,;b]$ nous permet cependant d'affirmer l'existence :

- D'un réel d_1 dans $]a\,;c[$ tel que $g'(d_1)=\frac{g(c)-g(a)}{c-a}$;
- D'un réel d_2 dans $]c\,;b[$ tel que $g'(d_2)=\frac{g(b)-g(c)}{b-c}$.

Plus explicitement, nous avons :

$$g'(d_1)=\frac{g(c)-g(a)}{c-a}=\frac{f(c)+\lambda(c-a)(b-c)-f(a)}{c-a}=\frac{f(c)-f(a)}{c-a}+\lambda(b-c)$$

Et :

$$g'(d_2)=\frac{g(b)-g(c)}{b-c}=\frac{f(b)-f(c)-\lambda(c-a)(b-c)-}{b-c}=\frac{f(b)-f(c)}{b-c}-\lambda(c-a)$$

L'application du théorème de Rolle à la fonction g' sur l'intervalle $[d_1\,;d_2]\subset[a\,;b]$ sera possible en choisissant λ de telle sorte que l'on ait : $g'(d_1)=g'(d_2)$. Soit :

$$\frac{f(c)-f(a)}{c-a}+\lambda(b-c)=\frac{f(b)-f(c)}{b-c}-\lambda(c-a)$$

On a alors facilement :

$$\begin{aligned}
\frac{f(c)-f(a)}{c-a}+\lambda(b-c)=\frac{f(b)-f(c)}{b-c}-\lambda(c-a)&\Leftrightarrow\\
\lambda(b-c)+\lambda(c-a)=\frac{f(b)-f(c)}{b-c}-\frac{f(c)-f(a)}{c-a}&\Leftrightarrow\\
\lambda(b-a)=\frac{[f(b)-f(c)](c-a)-[f(c)-f(a)](b-c)}{(c-a)(b-c)}&\Leftrightarrow\\
\lambda(b-a)=\frac{(c-a)f(b)+(b-c)f(a)-(b-a)f(c)}{(c-a)(b-c)}&\Leftrightarrow\\
\lambda(b-a)=\frac{1}{b-c}f(b)+\frac{1}{c-a}f(a)-\frac{b-a}{(c-a)(b-c)}f(c)&\Leftrightarrow\\
\lambda=\frac{1}{(b-a)(b-c)}f(b)+\frac{1}{(b-a)(c-a)}f(a)-\frac{1}{(c-a)(b-c)}f(c)&
\end{aligned}$$

Pour ce choix de λ, on a alors :

$$\begin{aligned}
g'(d_1)=g'(d_2)&=\frac{f(c)-f(a)}{c-a}+\lambda(b-c)\\
&=\frac{f(c)-f(a)}{c-a}+(b-c)\left[\frac{1}{(b-a)(b-c)}f(b)+\frac{1}{(b-a)(c-a)}f(a)-\frac{1}{(c-a)(b-c)}f(c)\right]\\
&=\frac{f(c)-f(a)}{c-a}+\frac{1}{b-a}f(b)+\frac{b-c}{(b-a)(c-a)}f(a)-\frac{1}{c-a}f(c)\\
&=\cancel{\frac{1}{c-a}f(c)}-\frac{1}{c-a}f(a)+\frac{1}{b-a}f(b)+\frac{(b-a)+(a-c)}{(b-a)(c-a)}f(a)-\cancel{\frac{1}{c-a}f(c)}\\
&=\cancel{-\frac{1}{c-a}f(a)}+\frac{1}{b-a}f(b)+\cancel{\frac{1}{c-a}f(a)}-\frac{1}{b-a}f(a)\\
&=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}
\end{aligned}$$

Ce résultat, très simple, correspond au coefficient directeur de la droite passant par les points de coordonnées $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$ … Nous y reviendrons un peu plus loin !

Dans ces conditions, le théorème de Rolle nous permet d'affirmer l'existence d'un réel d dans l'intervalle $]d_1 ; d_2[$ tel que : $g''(d) = 0$.

Comme on a toujours : $g''(x) = f''(x) - 2\lambda$, l'égalité $g''(d) = 0$ équivaut encore à : $\lambda = \frac{1}{2} f''(d)$. Soit :

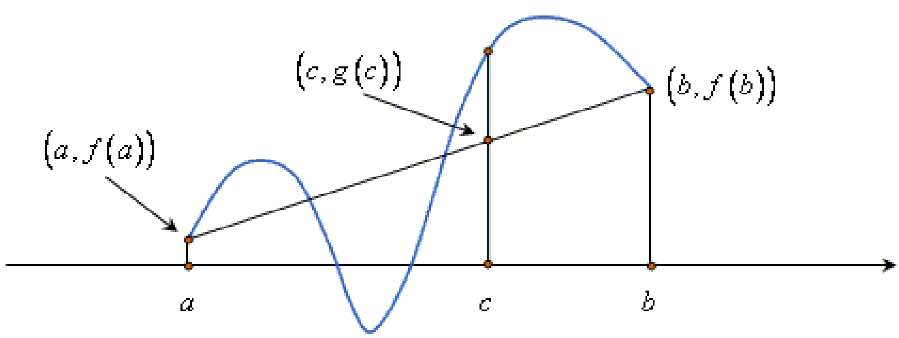
$$\frac{1}{(b-a)(b-c)} f(b) + \frac{1}{(b-a)(c-a)} f(a) - \frac{1}{(c-a)(b-c)} f(c) = \frac{1}{2} f''(d)$$

On en tire alors le résultat cherché :

$$\boxed{f(c) = \frac{b-c}{b-a} f(a) + \frac{c-a}{b-a} f(b) - \frac{(c-a)(b-c)}{2} f''(d)}$$

Commentons un peu la démarche précédente.

Le choix de λ est « illustré » sur la figure ci-dessous :



De façon à obtenir l'égalité $g'(d_1) = g'(d_2)$, on s'est débrouillé (i.e. on a choisi λ) de telle sorte que le point de coordonnées $(c, g(c))$ appartiennent à la droite passant par les points $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$. Ainsi, les droites passant par $(a, f(a))$ et $(c, g(c))$, d'une part, et $(c, g(c))$ et $(b, f(b))$, d'autre part, ont le même coefficient directeur (il vaut $\frac{f(b) - f(a)}{b-a}$, nous l'avons obtenu plus haut. En fait, ces deux droites sont confondues !).
C'est précisément ce que nous voulons (traduction graphique de $g'(d_1) = g'(d_2)$).

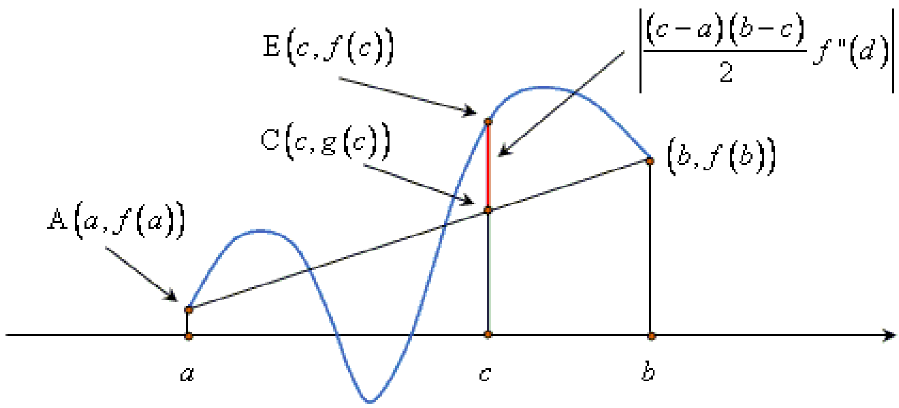
Cet alignement se traduit simplement par :

$$g(c) = \frac{b-c}{b-a} f(a) + \frac{c-a}{b-a} f(b)$$

L'égalité de la question 2 équivaut donc à : $f(c) = g(c) - \frac{(c-a)(b-c)}{2} f''(d)$.

3. La première question correspond à un cas particulier de la seconde.

   Si nous reprenons la figure ci-dessus en la complémentant un peu, on a :



La différence $f(c) - g(c)$ apparaît alors comme étant, éventuellement au signe près, la distance, pour $x = c$, entre le point de la courbe représentative de la fonction *f* (point E) et le point correspondant sur la corde $[\text{AB}]$ (point C). soit :

$$\text{EC} = \left| \frac{(c-a)(b-c)}{2} f''(d) \right|$$

Lorsque $f(a) = f(b)$, on a : $f(c) = f(a) - \frac{(c-a)(b-c)}{2} f''(d)$ et lorsque $f(a) = f(b) = 0$, on retrouve le résultat de la question 1 : $f(c) = -\frac{(c-a)(b-c)}{2} f''(d)$.