Calculer, pour tout entier naturel *n*, la dérivée nième de $x \mapsto \frac{1}{1-x}$.

## Analyse

Le calcul des premières dérivées permet d'effectuer une conjecture que l'on démontre facilement par récurrence.

## Résolution

En posant : $f(x) = \frac{1}{1-x} = (1-x)^{-1}$, on obtient rapidement :

$$f'(x) = -1\times(-1)\times(1-x)^{-1-1} = (1-x)^{-2}$$
$$f''(x) = -2\times(-1)\times(1-x)^{-2-1} = 2(1-x)^{-3}$$
$$f^{(3)}(x) = 2\times(-3)\times(-1)\times(1-x)^{-3-1} = 6(1-x)^{-4}$$

Nous faisons alors la conjecture suivante :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ f^{(n)}(x) = n!(1-x)^{-(n+1)}$$

Posons : $P_n$ : « $f^{(n)}(x) = n!(1-x)^{-(n+1)}$ ».

Les propriétés $P_0$, $P_1$, $P_2$ et $P_3$ sont vraies (cf. la définition de la fonction *f* et les calculs ci-dessus).

Supposons que la propriété $P_n$ soit vraie. On a donc : $f^{(n)}(x) = n!(1-x)^{-(n+1)}$.

On en tire : $f^{(n+1)}(x) = \left(f^{(n)}\right)'(x) = n!\times\left(-(n+1)\right)\times(-1)\times(1-x)^{-(n+1)-1} = (n+1)!\times(1-x)^{-(n+2)}$.
La propriété $P_{n+1}$ est donc vraie.

Finalement, pour tout entier naturel *n*, la propriété $P_n$ est vraie.

On a bien : $\forall n\in\mathbb{N},\ f^{(n)}(x) = n!(1-x)^{-(n+1)} = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$.

## Résultat final

$$\forall n \in \mathbb{N},\ f^{(n)}(x) = n!(1-x)^{-(n+1)} = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$$