Calculer, pour tout entier naturel *n*, la dérivée nième de $x \mapsto \frac{1}{1+x}$.

Analyse

Le calcul des premières dérivées permet d'effectuer une conjecture que l'on démontre facilement par récurrence.

Résolution

En posant : $f(x) = \frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1}$, on obtient rapidement :

$$f'(x) = -1 \times (1+x)^{-1-1} = -(1+x)^{-2}$$
$$f''(x) = -2 \times \left\{-(1+x)^{-2-1}\right\} = 2(1+x)^{-3}$$
$$f^{(3)}(x) = 2 \times (-3) \times (1-x)^{-3-1} = -6(1-x)^{-4}$$

Nous faisons alors la conjecture suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ f^{(n)}(x) = (-1)^n \times n!(1+x)^{-(n+1)}$$

Posons : P_n : « $f^{(n)}(x) = (-1)^n \times n!(1+x)^{-(n+1)}$ ».

Les propriétés P_0, P_1, P_2 et P_3 sont vraies (cf. la définition de la fonction *f* et les calculs ci-dessus).

Supposons que la propriété P_n soit vraie. On a donc : $f^{(n)}(x) = (-1)^n \times n!(1+x)^{-(n+1)}$.

On en tire :

$$f^{(n+1)}(x) = \left(f^{(n)}\right)'(x) = \left(-(n+1)\right) \times \left\{(-1)^n \times n! \times (-1) \times (1+x)^{-(n+1)-1}\right\} = (-1)^{n+1} \times (n+1)! \times (1+x)^{-(n+2)}$$

La propriété P_{n+1} est donc vraie.

Finalement, pour tout entier naturel *n*, la propriété P_n est vraie.

On a bien : $\forall n \in \mathbb{N},\ f^{(n)}(x) = (-1)^n \times n!(1+x)^{-(n+1)} = \frac{(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}}$.

Résultat final

$$\forall n \in \mathbb{N},\ f^{(n)}(x) = (-1)^n \times n!(1+x)^{-(n+1)} = \frac{(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}}$$