Soit a un réel.
Calculer, pour tout entier naturel n, la dérivée nième de la fonction :

$$x \mapsto (x+a)e^{-x}$$

Analyse

Le calcul des premières dérivées permet d'effectuer une conjecture que l'on démontre facilement par récurrence.

Résolution

En posant : $f(x)=(x+a)e^{-x}$, on obtient rapidement :

$$f'(x)=(1-x-a)e^{-x}=-(x+a-1)e^{-x}$$
$$f''(x)=-(1-x-a+1)e^{-x}=(x+a-2)e^{-x}$$
$$f^{(3)}(x)=(1-x-a+2)e^{-x}=-(x+a-3)e^{-x}$$

Nous faisons alors la conjecture suivante :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ f^{(n)}(x)=(-1)^n\times(x+a-n)e^{-x}$$

Posons : P_n : « $f^{(n)}(x)=(-1)^n\times(x+a-n)e^{-x}$ ».

Les propriétés P_0, P_1, P_2 et P_3 sont vraies (cf. la définition de la fonction *f* et les calculs ci-dessus).

Supposons que la propriété P_n soit vraie. On a donc : $f^{(n)}(x)=(-1)^n\times(x+a-n)e^{-x}$.

On en tire :

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x)&=\left(f^{(n)}\right)'(x)=(-1)^n\times(1-x-a+n)e^{-x}\\ &=(-1)^n\times(-1)(x+a-n-1)e^{-x}=(-1)^{n+1}\times\left(x+a-(n+1)\right)e^{-x} \end{aligned}.$$

La propriété P_{n+1} est donc vraie.

Finalement, pour tout entier naturel *n*, la propriété P_n est vraie.
On a bien : $\forall n\in\mathbb{N},\ f^{(n)}(x)=(-1)^n\times(x+a-n)e^{-x}$.

Résultat final

$$\forall n \in \mathbb{N},\ f^{(n)}(x) = (-1)^n \times (x + a - n)e^{-x}$$