

Soit f une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , dérivable.

Montrer que la fonction $|f|$ admet en tout point de \mathbb{R} une dérivée à droite et une dérivée à gauche.

Analyse

On revient à la définition du nombre dérivée (à droite, à gauche si besoin est) d'une fonction en distinguant plusieurs situations.

Résolution

Soit a un réel quelconque.

Soulignons qu'en tant que fonction dérivable sur \mathbb{R} , f est continue.

Si $f(a) > 0$

Alors $|f(a)| = f(a)$ et pour h suffisamment petit, la continuité de f en a nous donne (on a choisi $\varepsilon = \frac{f(a)}{3}$):

$$\exists \alpha > 0 / x \in]a - \alpha ; a + \alpha[\Rightarrow f(x) \in \left] f(a) - \frac{f(a)}{3} ; f(a) + \frac{f(a)}{3} \right[$$

On en déduit : $\forall x \in]a - \alpha ; a + \alpha[\Rightarrow f(x) > \frac{2}{3} f(a) > 0$ (la fonction f est localement positive).

Pour tout réel h inférieur ou égal à α , on a alors : $\frac{|f(a+h)| - |f(a)|}{h} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ et :

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \neq 0}} \frac{|f(a+h)| - |f(a)|}{h} = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \neq 0}} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a)$$

La fonction $|f|$ est donc dérivable en a et on a : $|f|'(a) = f'(a)$.

Si $f(a) < 0$

On raisonne comme précédemment mais cette fois, la fonction f est localement négative et on obtient, pour h suffisamment petit :

$$\frac{|f(a+h)| - |f(a)|}{h} = \frac{-f(a+h) - (-f(a))}{h} = -\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

puis :

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \neq 0}} \frac{|f(a+h)| - |f(a)|}{h} = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \neq 0}} \left[-\frac{f(a+h) - f(a)}{h} \right] = -f'(a)$$

La fonction $|f|$ est donc dérivable en a et on a cette fois : $|f|'(a) = -f'(a)$.

Si $f(a) = 0$

La dérivabilité de f en a nous donne :

$$f(a+h) = \cancel{f(a)} + f'(a).h + h.\varepsilon(h) = (f'(a) + \varepsilon(h)).h$$

Il vient alors :

$$\frac{|f(a+h)| - |f(a)|}{h} = \frac{|f(a+h)|}{h} = \frac{|(f'(a) + \varepsilon(h)).h|}{h} = |f'(a) + \varepsilon(h)| \cdot \frac{|h|}{h}$$

Comme $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$, on a : $\lim_{h \rightarrow 0} (f'(a) + \varepsilon(h)) = f'(a)$ puis, du fait de la continuité de la valeur absolue : $\lim_{h \rightarrow 0} |f'(a) + \varepsilon(h)| = |f'(a)|$.

On a alors :

- Pour $h > 0$: $\lim_{h \rightarrow 0, h > 0} \frac{|h|}{h} = 1$ et $\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h > 0}} \frac{|f(a+h)|}{h} = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h > 0}} \left[|f'(a) + \varepsilon(h)| \cdot \frac{|h|}{h} \right] = |f'(a)|$;
- Pour $h < 0$: $\lim_{h \rightarrow 0, h < 0} \frac{|h|}{h} = -1$ et $\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h < 0}} \frac{|f(a+h)|}{h} = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h < 0}} \left[|f'(a) + \varepsilon(h)| \cdot \frac{|h|}{h} \right] = -|f'(a)|$.

Dans ce cas, la fonction $|f|$ est dérivable à gauche et à droite et on a :

$$f'_g(a) = -|f'(a)| \text{ et } f'_d(a) = |f'(a)|$$

Résultat final

Si f est une fonction dérivable sur \mathbb{R} alors la fonction $|f|$ admet en tout point de \mathbb{R} une dérivée à gauche et à droite.