Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=\left(\frac{x-3}{x^2+2}\right)^5$$

Déterminer la dérivée f' de la fonction f.

Analyse

On identifie une fonction composée et on la dérive en utilisant la formule du cours …

Résolution

On peut écrire : $f=h\circ g$ avec, pour tout x réel :

- $g(x)=\frac{x-3}{x^2+2}$;
- $h(x)=x^5$.

On a donc le schéma :

$$x \overset{g}{\mapsto} \frac{x-3}{x^2+2}$$
$$X \overset{h}{\mapsto} X^5$$

On a facilement (dérivée d'un rapport), pour tout x réel :

$$g'(x)=\frac{x-3}{x^2+2}=\frac{1\times\left(x^2+2\right)-(x-3)\times 2x}{\left(x^2+2\right)^2}=\frac{-x^2+6x+2}{\left(x^2+2\right)^2}$$

Par ailleurs : $h'(x)=5x^4$.

Finalement :

$$f'(x)=g'(x)\times h'(g(x))=\frac{-x^2+6x+2}{\left(x^2+2\right)^2}\times 5\times\left(\frac{x-3}{x^2+2}\right)^4=\frac{5\left(-x^2+6x+2\right)(x-3)^4}{\left(x^2+2\right)^6}$$

Résultat final

La fonction dérivée de la fonction *f* définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto \left(\frac{x-3}{x^2+2}\right)^5$ est la fonction f' définie sur $\mathbb{R}$ par $f'(x) : x \mapsto \frac{5\left(-x^2+6x+2\right)(x-3)^4}{\left(x^2+2\right)^6}$.