

1. Pour tout entier naturel k supérieur ou égal à 2, appliquer le théorème des accroissements finis à la fonction $\varphi: x \mapsto \ln(\ln x)$ sur l'intervalle $[k; k+1]$.

2. Montrer que la suite de terme général $u_n = \sum_{k=2}^n \frac{1}{k \ln k}$ diverge.

Analyse

Un exercice classique et sans difficulté majeure pour un résultat qui peut un peu surprendre (on connaît la lenteur de la divergence de $\sum \frac{1}{n}$, celle-là est « pire » !).

Résolution

Question 1.

La fonction φ est définie et dérivable sur l'intervalle $]1; +\infty[$. Pour tout entier naturel k supérieur ou égal à 2, on a : $[k; k+1] \subset]1; +\infty[$. D'après le théorème des accroissements finis, il existe un réel a_k dans l'intervalle $]k; k+1[$ tel que :

$$\varphi'(a_k) = \frac{\varphi(k+1) - \varphi(k)}{(k+1) - k} = \varphi(k+1) - \varphi(k)$$

Or, pour tout réel x strictement supérieur à 1, on a : $\varphi'(x) = \frac{1}{x \ln x}$.

Ainsi : $\varphi'(a_k) = \frac{1}{a_k \ln a_k} = \varphi(k+1) - \varphi(k) = \ln(\ln(k+1)) - \ln(\ln k)$.

En définitive :

Pour tout entier naturel k supérieur ou égal à 2, il existe un réel a_k dans l'intervalle $]k; k+1[$ tel que :

$$\frac{1}{a_k \ln a_k} = \ln(\ln(k+1)) - \ln(\ln k)$$

Question 2.

Pour tout entier k supérieur ou égal à 2, on a : $k < a_k < k+1$.

Or, la fonction $\varphi' : x \mapsto \frac{1}{x \ln x}$ est strictement décroissante comme composée d'une fonction strictement croissante (la fonction $x \mapsto x \ln x$) et d'une fonction strictement décroissante (la fonction inverse). Il vient donc :

$$\begin{aligned} k < a_k < k+1 \\ \Leftrightarrow \varphi'(k+1) < \varphi'(a_k) < \varphi'(k) \\ \Leftrightarrow \frac{1}{(k+1)\ln(k+1)} < \frac{1}{a_k \ln a_k} < \frac{1}{k \ln k} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{(k+1)\ln(k+1)} < \ln(\ln(k+1)) - \ln(\ln k) < \frac{1}{k \ln k} \\ \Rightarrow \ln(\ln(k+1)) - \ln(\ln k) < \frac{1}{k \ln k} \end{aligned}$$

Pour k variant de 2 à n , on obtient les $n-1$ inégalités suivantes :

$$\begin{aligned} \ln(\ln 3) - \ln(\ln 2) &< \frac{1}{2 \ln 2} \\ \ln(\ln 4) - \ln(\ln 3) &< \frac{1}{3 \ln 3} \\ \ln(\ln 5) - \ln(\ln 4) &< \frac{1}{4 \ln 4} \\ &\dots \\ \ln(\ln n) - \ln(\ln(n-1)) &< \frac{1}{(n-1)\ln(n-1)} \\ \ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln n) &< \frac{1}{n \ln n} \end{aligned}$$

En les sommant membre à membre, il vient :

$$\ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln 2) < \sum_{k=2}^n \frac{1}{k \ln k} = u_n$$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} [\ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln 2)] = \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(\ln(n+1)) = +\infty$, on a finalement (comparaison) :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=2}^n \frac{1}{k \ln k} = +\infty$$

La suite (u_n) diverge : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=2}^n \frac{1}{k \ln k} = +\infty$.