

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction dérivable et bornée.

On suppose que l'on a :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = L$ .

Montrer que  $L = 0$ .

---

## Analyse

Un exercice classique où on mène un raisonnement par l'absurde en supposant, par exemple, la limite  $L$  strictement positive. Le théorème des accroissements finis permet alors de rendre  $f(x)$  arbitrairement grand et de contredire l'hypothèse «  $f$  bornée ».

---

## Résolution

Menons un raisonnement par l'absurde en supposant, par exemple :  $L > 0$  (on raisonnerait de façon similaire avec l'hypothèse  $L < 0$ ).

Puisque  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = L$ , pour  $\varepsilon = \frac{L}{2}$ , il existe un réel  $A$  tel que :  $x > A \Rightarrow \frac{L}{2} < f'(x) < \frac{3L}{2}$ .

Soit alors  $a$  et  $x$  deux réels tels que :  $A < a < x$ . D'après le théorème des accroissements finis, il existe un réel  $c_x$  de l'intervalle  $]a; x[$  tel que :  $f'(c_x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ .

On en tire :  $f(x) - f(a) = f'(c_x) \times (x - a) > \frac{L}{2} \times (x - a)$ .

Soit :  $f(x) > f(a) + \frac{L}{2} \times (x - a)$ .

Ainsi, si  $M$  est un majorant quelconque de  $f$ , on pourra toujours trouver un réel  $x$  tel que :

$$f(x) > f(a) + \frac{L}{2} \times (x - a) > M$$

Ce qui est absurde.

---

## Résultat final

Si  $f$ , fonction réelle de la variable réelle, est dérivable et bornée et si sa dérivée admet une limite finie en  $+\infty$  alors cette limite est nulle.