

Calculer, pour tout entier naturel n , la dérivée n -ième de $x \mapsto e^{\sqrt{3}x} \sin x$.

Analyse

On notera dans un premier temps que la fonction considérée est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} comme produit de deux fonctions de classe \mathcal{C}^∞ sur cet intervalle. Ensuite, on peut se « précipiter » sur la formule de Leibniz mais ... il vaut mieux remarquer que la fonction sinus n'est pas très « éloignée » d'une exponentielle ... complexe !

Résolution

En notant f la fonction $x \mapsto e^{\sqrt{3}x} \sin x$ et Ψ la fonction complexe de la variable réelle définie par : $\Psi : x \mapsto \Psi(x) = e^{\sqrt{3}x} (\cos x + i \sin x) = e^{\sqrt{3}x} e^{ix} = e^{(\sqrt{3}+i)x}$, on a $f(x) = \text{Im}(\Psi(x))$ puis, pour tout entier naturel n : $f^{(n)}(x) = \text{Im}(\Psi^{(n)}(x))$.

La fonction Ψ se dérive facilement. Pour tout entier naturel n et tout réel x , on a :

$$\begin{aligned}\Psi^{(n)}(x) &= (\sqrt{3} + i)^n e^{(\sqrt{3}+i)x} \\ &= \left[2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right) \right]^n e^{(\sqrt{3}+i)x} \\ &= 2^n \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)^n e^{(\sqrt{3}+i)x} \\ &= 2^n \left(e^{i\frac{\pi}{6}} \right)^n e^{(\sqrt{3}+i)x} \\ &= 2^n e^{in\frac{\pi}{6}} e^{(\sqrt{3}+i)x} \\ &= 2^n e^{\sqrt{3}x} e^{i\left(x+n\frac{\pi}{6}\right)} \\ &= 2^n e^{\sqrt{3}x} \left[\cos \left(x + n \frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left(x + n \frac{\pi}{6} \right) \right]\end{aligned}$$

D'où :

$$f^{(n)}(x) = \text{Im}(\Psi^{(n)}(x)) = 2^n e^{\sqrt{3}x} \sin \left(x + n \frac{\pi}{6} \right)$$

Résultat final

La dérivée n -ième de la fonction $x \mapsto e^{\sqrt{3}x} \sin x$ est la fonction définie par :

$$x \mapsto 2^n e^{\sqrt{3}x} \sin\left(x + n\frac{\pi}{6}\right)$$