Calculer, pour tout entier naturel n, la dérivée n-ième de $x \mapsto x^n(1-x)^n$ et en déduire la valeur de $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2$.

Analyse

La formule de Leibniz nous « tend les bras » ! Une fois obtenue, on regardera attentivement chacun des termes de la somme …

Résolution

Posons : $f_n : x \mapsto x^n(1-x)^n = g_n(x)\times h_n(x)$ avec $g_n(x) = x^n$ et $h_n(x) = (1-x)^n$.
Pour tout entier naturel k inférieur ou égal à n, on a, classiquement :

$$g_n^{(k)}(x) = n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)x^{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!}x^{n-k}$$

Et donc :

$$h_n^{(k)}(x) = (-1)^k n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)(1-x)^{n-k} = (-1)^k\frac{n!}{(n-k)!}(1-x)^{n-k}$$

Il vient alors en utilisant la formule de Leibniz :

$$\begin{aligned}
f_n^{(n)}(x) &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}g_n^{(k)}(x)h_n^{(n-k)}(x)\\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{n!}{(n-k)!}x^{n-k}(-1)^{n-k}\frac{n!}{(n-(n-k))!}(1-x)^{n-(n-k)}\\
&= n!\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}\frac{n!}{k!(n-k)!}x^{n-k}(1-x)^k\\
&= n!\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}^2 x^{n-k}(1-x)^k
\end{aligned}$$

On a donc :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ \forall x\in\mathbb{R},\ f_n^{(n)}(x) = n!\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}^2 x^{n-k}(1-x)^k$$

Intéressons-nous au coefficient de « x^n » de $f_n^{(n)}(x)$.

On a d'abord : $f_n(x) = x^n(1-x)^n$ qui est une fonction polynomiale de degré $2n$ et dont le coefficient de « x^{2n} » vaut $(-1)^n$. On peut donc écrire : $f_n(x) = x^n(1-x)^n = (-1)^n x^{2n} + r_n(x)$ où r_n est une fonction polynomiale de degré $2n-1$.
Il vient alors :

$$\begin{aligned}
f_n^{(n)}(x) &= (-1)^n 2n\times(2n-1)\times(2n-2)\times\ldots\times(2n-n+1)x^{2n-n} + r_n^{(n)}(x) \\
&= (-1)^n 2n\times(2n-1)\times(2n-2)\times\ldots\times(n+1)x^n + r_n^{(n)}(x) \\
&= (-1)^n \frac{(2n)!}{n!} x^n + r_n^{(n)}(x)
\end{aligned}$$

Suivant cette première approche, le coefficient de « x^n » de $f_n^{(n)}(x)$ vaut :

$$(-1)^n \frac{(2n)!}{n!}.$$

On a également obtenu : $f_n^{(n)}(x) = n!\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}^2 x^{n-k}(1-x)^k$.

Cette somme comporte $n+1$ termes. Soit l'un d'eux : $(-1)^{n-k} n!\binom{n}{k}^2 x^{n-k}(1-x)^k$.

Il s'agit d'une fonction polynomiale de degré $(n-k)+k=n$. Le coefficient de « x^n » dans ce terme vaut donc $(-1)^{n-k} n!\binom{n}{k}^2 \times(-1)^k = (-1)^n n!\binom{n}{k}^2$.

Le coefficient de « x^n » de $f_n^{(n)}(x)$ selon cette autre approche vaut donc :

$$(-1)^n n!\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2$$

En égalisant les deux coefficients obtenus, il vient :

$$\begin{aligned}
(-1)^n n!\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2 &= (-1)^n \frac{(2n)!}{n!} \\
\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2 &= \frac{(2n)!}{(n!)^2}
\end{aligned}$$

Résultat final

La dérivée n-ième de la fonction $x \mapsto x^n (1-x)^n$ est la fonction définie par :

$$x \mapsto n! \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k}^2 x^{n-k} (1-x)^k$$

On a :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \frac{(2n)!}{(n!)^2}$$