

Soit f une fonction réelle de la variable réelle définie et n fois ($n \geq 1$) dérivable sur un segment $[a; b]$ ($a < b$).

1. Montrer que si la fonction f s'annule en $n+1$ points distincts du segment $[a; b]$ alors il existe un réel c dans l'intervalle $]a; b[$ tel que $f^{(n)}(c) = 0$.
2. Montrer que si l'on a $f(a) = f'(a) = f''(a) = \dots = f^{(n-1)}(a) = f(b) = 0$ alors il existe un réel c dans l'intervalle $]a; b[$ tel que $f^{(n)}(c) = 0$.

Analyse

Deux jolies variations autour du théorème de Rolle ne présentant pas de difficultés particulières : à chaque fois, un raisonnement par récurrence permet de conclure.

Résolution

Question 1.

Nous allons établir le résultat en menant un raisonnement par récurrence.

Initialisation.

Pour $n = 1$, on suppose donc que la fonction f s'annule en deux points distincts x_1 et x_2 ($x_1 < x_2$) du segment $[a; b]$. On peut alors appliquer le théorème de Rolle à la fonction f sur le segment $[x_1; x_2]$ et en déduire qu'il existe un réel c dans $]x_1; x_2[\subset]a; b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Ainsi, la propriété est vraie à l'ordre 1. Elle est initialisée.

Bien que nous n'y soyons pas tenus, traitons le cas $n = 2$.

On suppose cette fois que la fonction f s'annule en trois points distincts x_1 , x_2 et x_3 ($x_1 < x_2 < x_3$) du segment $[a; b]$. On peut alors appliquer le théorème de Rolle à la fonction f sur chacun des segments $[x_1; x_2]$ et $[x_2; x_3]$. On en déduit ainsi qu'il existe deux réels c_1 et

c_2 appartenant respectivement aux intervalles $]x_1 ; x_2[$ et $]x_2 ; x_3[$ et vérifiant :
 $f'(c_1) = f'(c_2) = 0$.

La fonction f' est définie sur $[c_1 ; c_2]$ et dérivable sur $]c_1 ; c_2[$. On peut donc lui appliquer le théorème de Rolle et en déduire qu'il existe un réel c dans $]c_1 ; c_2[\subset]a ; b[$ tel que $f''(c) = 0$. La propriété est donc vraie pour $n = 2$.

Hérédité.

Soit n un entier naturel non nul quelconque fixé.

Nous supposons la propriété vraie au rang n . Qu'en est-il au rang $n + 1$?

Nous nous donnons donc une fonction f définie et dérivable $n + 1$ fois sur un segment $[a ; b]$ ($a < b$).

Nous supposons en outre que la fonction f s'annule en $n + 2$ points $x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}$ et x_{n+2} du segment $[a ; b]$ ($x_1 < x_2 < \dots < x_n < x_{n+1} < x_{n+2}$). On considère les $n + 1$ intervalles $[x_1 ; x_2]$, $[x_2 ; x_3]$, ..., $[x_{n+1} ; x_{n+2}]$. Sur chaque intervalle $[x_i ; x_{i+1}]$ (i variant dans $\llbracket 1 ; n + 1 \rrbracket$), la fonction f est dérivable et vérifie $f(x_i) = f(x_{i+1}) = 0$. En appliquant le théorème de Rolle à la fonction f sur chaque intervalle $[x_i ; x_{i+1}]$, on en déduit qu'il existe $n + 1$ réels distincts c_i ($c_i \in]x_i ; x_{i+1}[$) vérifiant : $f'(c_1) = f'(c_2) = \dots = f'(c_n) = f'(c_{n+1}) = 0$.

Ainsi, la fonction f' s'annule en $n + 1$ points distincts de l'intervalle $[a ; b]$ et y est n fois dérivable (puisque la fonction f est $n + 1$ dérivable sur $[a ; b]$). D'après l'hypothèse de récurrence, il existe donc un réel c dans $]a ; b[$ tel que $(f')^{(n)}(c) = 0$, soit : $f^{(n+1)}(c) = 0$. Ainsi, la propriété est vraie au rang $n + 1$.

Initialisée et héréditaire, la propriété est ainsi vraie pour tout entier naturel n non nul.

Si f est une fonction définie, n fois ($n \geq 1$) dérivable et s'annulant en $n + 1$ points d'un segment $[a, b]$ ($a < b$) **alors** il existe un réel c dans $]a, b[$ tel que $f^{(n)}(c) = 0$.

Question 2.

Ici encore, nous menons un raisonnement par récurrence.

Initialisation.

Pour $n = 1$, la fonction f est supposée définie et dérivable sur $[a, b]$ avec $f(a) = f(b) = 0$. On peut appliquer le théorème de Rolle et on en déduit qu'il existe un réel c dans $]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

La propriété est vraie au rang 1, elle est initialisée.

Hérédité.

Soit n un entier naturel non nul quelconque fixé.

Nous supposons la propriété vraie au rang n . Qu'en est-il au rang $n+1$?

Nous nous donnons donc une fonction f définie et dérivable $n+1$ fois sur un segment $[a; b]$ ($a < b$).

Nous supposons en outre que l'on a : $f(a) = f'(a) = \dots = f^{(n-1)}(a) = f^{(n)}(a) = f(b) = 0$.

Ainsi, la fonction f est dérivable n fois et vérifie $f(a) = f'(a) = \dots = f^{(n-1)}(a) = f(b) = 0$.

D'après l'hypothèse de récurrence, on peut donc affirmer qu'il existe un réel c dans $]a, b[$ tel que $f^{(n)}(c) = 0$.

Considérons alors la fonction $f^{(n)}$ sur l'intervalle $[a; c] \subset [a; b]$.

Elle y est dérivable puisque la fonction f est dérivable $n+1$ fois sur le segment $[a; b]$.

Par ailleurs, on a, d'après ce qui précède : $f^{(n)}(a) = f^{(n)}(c) = 0$.

Le théorème de Rolle nous permet alors d'affirmer qu'il existe un réel c' dans $]a; c[\subset]a; b[$ tel que $(f^{(n)})'(c) = 0$, soit $f^{(n+1)}(c) = 0$.

Ainsi, la propriété est vraie au rang $n+1$.

Initialisée et héréditaire, la propriété est ainsi vraie pour tout entier naturel n non nul.

Si f est une fonction définie, n fois ($n \geq 1$) dérivable sur un segment $[a, b]$ ($a < b$) et vérifiant $f(a) = f'(a) = \dots = f^{(n-1)}(a) = f(b) = 0$ **alors** il existe un réel c dans $]a, b[$ tel que $f^{(n)}(c) = 0$.