

Soit  $a$  un réel et  $f$  une fonction réelle de la variable réelle définie et dérivable sur l'intervalle  $[a; +\infty[$ .

On suppose que l'on a :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = f(a)$ .

Montrer qu'il existe un réel  $c$  dans l'intervalle  $]a; +\infty[$  tel que  $f'(c) = 0$ .

---

## Analyse

Un résultat qui ressemble au théorème de Rolle. La démonstration y ressemblera aussi (faites quelques dessins pour vous en convaincre !).

---

## Résolution

Dans un premier temps, nous allons voir que nous pouvons quelque peu simplifier la situation proposée (le travail ci-dessous n'est en rien obligatoire mais il nous donne l'occasion de réfléchir à ce qu'est une hypothèse et à ce qui importe vraiment dans sa formulation).

En introduisant la fonction  $g$  dérivable et définie sur  $[a; +\infty[$  par  $g : x \mapsto f(x) - f(a)$ , on constate que l'on peut supposer, sans perte de généralité, que l'on a :  $f'(a) = 0$ .

On peut ensuite supposer que l'on a :  $f'(a) \neq 0$ .

En effet, si on a  $f'(a) = 0$ , deux situations sont envisageables :

- Pour tout  $x$  de l'intervalle  $[a; +\infty[$  on a :  $f'(x) = 0$ . Il existe alors bien un réel  $c$  de l'intervalle  $]a; +\infty[$  tel que  $f'(c) = 0$  (n'importe quel réel strictement supérieur à  $a$  convient).
- Il existe un réel  $b$  de l'intervalle  $]a; +\infty[$  tel que  $f'(b) \neq 0$ . On va alors travailler sur l'intervalle  $[b; +\infty[$ .

Quitte à changer d'intervalle, on peut donc supposer  $f'(a) \neq 0$ .

On peut même supposer  $f'(a) > 0$ .

En effet, si on a  $f'(a) < 0$ , il suffit de considérer la fonction  $g = -f$  qui vérifie les mêmes hypothèses que  $f$  sauf au niveau du nombre dérivé en  $a$  puisque l'on a :  $g'(a) = -f'(a) > 0$ .

En définitive, on peut supposer :  $f'(a) = 0$  (on a alors  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ ) et  $f'(a) > 0$ .

Tout comme pour le théorème de Rolle, nous allons en fait montrer que la fonction  $f$  est bornée sur  $]a; +\infty[$  et qu'elle atteint sa borne supérieure en un point de  $]a; +\infty[$ .

Comme  $f'(a) > 0$ , il existe un intervalle  $[a; b]$  (avec  $a < b$ ) sur lequel la fonction  $f$  prend des valeurs strictement positives sauf en  $a$ . La fonction  $f$  étant continue sur le segment  $[a; b]$  l'image en est également un segment. Notons-le  $[0; M_1]$ . Le réel  $M_1 = \sup_{[a; b]} f(x)$  est strictement positif et comme  $f(a) = 0$ , il est atteint en un réel  $c_1$  de  $]a; b]$ .

Comme  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ , pour  $\varepsilon = \frac{M_1}{2}$ , on peut affirmer qu'il existe un réel  $A \geq a$  tel que

$$x \geq A \Rightarrow f(x) \leq \frac{M_1}{2}.$$

- Si  $A \leq b$ , on a immédiatement  $\sup_{[a; +\infty[} f(x) = M_1$  atteint en  $c = c_1 \in ]a; b] \subset ]a; +\infty[$ .
- Si  $A > b$ , on pose alors  $M = \sup_{[a; A]} f(x) \geq \sup_{[a; b]} f(x) = M_1$ . Le réel  $M$  sera lui aussi atteint, cette fois en un réel  $c$  de l'intervalle  $]a; A] \subset ]a; +\infty[$ .

Dans l'un ou l'autre des deux cas, la fonction  $f$  admet sur  $]a; +\infty[$  une borne supérieure atteinte en  $c \in ]a; +\infty[$ , il s'agit donc d'un maximum global. Il est également local et la dérivabilité de la fonction  $f$  en  $c$  entraîne  $f'(c) = 0$ .

Le résultat est ainsi établi.

---

## Résultat final

**Si** une fonction réelle de la variable réelle  $f$  est définie et dérivable sur un intervalle  $]a; +\infty[$  en vérifiant  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = f(a)$  **alors** il existe un réel  $c$  dans l'intervalle  $]a; +\infty[$  tel que  $f'(c) = 0$ .