Soit n un entier naturel et soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$f_n(x) = x^n e^{\frac{1}{x}}$$

Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n et pour tout réel strictement positif x, on a :

$$f_n^{(n+1)}(x) = (-1)^{n+1} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^{n+2}}$$

Analyse

Comme on peut-être le pressentir, le point un peu délicat se situe au niveau de l'hérédité où l'on considère la fonction $f_{n+1}^{(n+2)}$. Mais celle-ci est elle-même la dérivée $n+1$*ème* de la fonction f_{n+1}' qui est facile à calculer et s'exprime simplement en fonction de … f_n et f_{n-1} !

Résolution

Notons, dans un premier temps, que pour tout entier naturel n, la fonction f_n est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme produit de deux fonctions dérivables sur cet intervalle :

- La fonction polynomiale : $x \mapsto x^n$.
- La fonction $x \mapsto e^{\frac{1}{x}}$ qui est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme composée de la fonction inverse, dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et de la fonction exponentielle, dérivable sur $\mathbb{R}$.

Pour $n=0$, on a : $f_0(x) = e^{\frac{1}{x}}$ et $f_0^{(1+0)}(x) = f_0^{(1)}(x) = f_0'(x) = -\frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}$.

Par ailleurs : $(-1)^{n+1} \dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{x^{n+2}} = (-1)^{0+1} \dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{x^{0+2}} = (-1)^1 \dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} = -\dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} = -\dfrac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}$.

L'égalité est donc vérifiée pour $n=0$.

Bien que ce ne soit pas obligatoire, nous traitons le cas $n=1$.

Pour $n=1$, on a : $f_1(x) = x e^{\frac{1}{x}}$ et $f_1^{(1+1)}(x) = f_1^{(2)}(x)$.

$$f_1'(x) = x e^{\frac{1}{x}} = 1 \times e^{\frac{1}{x}} + x \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) \times e^{\frac{1}{x}} = \left(1 - \frac{1}{x}\right) \times f_0(x).$$

D'où :

$$\begin{aligned}
f_1''(x) &= \frac{1}{x^2}\times f_0(x)+\left(1-\frac{1}{x}\right)\times f_0'(x) \\
&= \frac{1}{x^2}\times e^{\frac{1}{x}}+\left(1-\frac{1}{x}\right)\times\left(-\frac{1}{x^2}\times e^{\frac{1}{x}}\right) \\
&= \left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)\times e^{\frac{1}{x}} \\
&= \frac{1}{x^3}\times e^{\frac{1}{x}}
\end{aligned}$$

Par ailleurs : $(-1)^{n+1}\dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{x^{n+2}}=(-1)^{1+1}\dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{x^{1+2}}=(-1)^2\dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{x^3}=\dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{x^3}=\dfrac{1}{x^3}e^{\frac{1}{x}}$.
L'égalité est donc vérifiée pour $n=1$.

Soit maintenant un entier naturel *n* quelconque <u>fixé</u> non nul (voir plus loin la remarque sur la non nullité de *n*).

Nous supposons que nous avons $f_k^{(k+1)}(x)=(-1)^{k+1}\dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{x^{k+2}}$ pour tout entier naturel *k* inférieur ou égal à *n*.

Nous nous intéressons alors à la fonction $f_{n+1}^{(n+1+1)} = f_{n+1}^{(n+2)}$.

On a : $f_{n+1}(x)=x^{n+1}e^{\frac{1}{x}}=x\times x^n e^{\frac{1}{x}}=x\times f_n(x)$.
Alors :

$$\begin{aligned}
f_{n+1}'(x) &= 1\times f_n(x)+x\times f_n'(x) \\
&= f_n(x)+x\times\left(n\times x^{n-1}-\frac{1}{x^2}\times x^n\right)e^{\frac{1}{x}} \\
&= f_n(x)+x\times\left(n\times x^{n-1}-x^{n-2}\right)\times e^{\frac{1}{x}} \\
&= f_n(x)+\left(n\times x^{n}-x^{n-1}\right)\times e^{\frac{1}{x}} \\
&= f_n(x)+n\,f_n(x)-f_{n-1}(x) \\
&= (n+1)\,f_n(x)-f_{n-1}(x)
\end{aligned}$$

Faisons ici une remarque importante : c'est parce que nous avons supposé *n* non nul que nous avons le droit d'écrire $x^{n-1}\times e^{\frac{1}{x}} = f_{n-1}(x)$ … Il était donc, à postériori, déterminant que l'on valide l'égalité pour $n=1$.

On en tire :

$$f_{n+1}^{(n+2)}=\left(f_{n+1}'\right)^{(n+1)}=\left((n+1)\,f_n-f_{n-1}\right)^{(n+1)}=(n+1)\,f_n^{(n+1)}-\left(f_{n-1}^{(n)}\right)'$$

Pour tout x réel strictement positif, on a, d'après l'hypothèse de récurrence :

$$f_n^{(n+1)}(x)=(-1)^{n+1}\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^{n+2}} \text{ et } f_{n-1}^{(n)}(x)=(-1)^n\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^{n+1}}$$

D'où :

$$\begin{aligned}\left(f_{n-1}^{(n)}\right)'(x)&=(-1)^n\left[-(n+1)\frac{1}{x^{n+2}}+\frac{1}{x^{n+1}}\times\left(-\frac{1}{x^2}\right)\right]e^{\frac{1}{x}}\\&=(-1)^{n+1}\left(\frac{n+1}{x^{n+2}}+\frac{1}{x^{n+3}}\right)e^{\frac{1}{x}}\end{aligned}$$

Alors :

$$\begin{aligned}f_{n+1}^{(n+2)}(x)&=(n+1)\times(-1)^{n+1}\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^{n+2}}-(-1)^{n+1}\left(\frac{n+1}{x^{n+2}}+\frac{1}{x^{n+3}}\right)e^{\frac{1}{x}}\\&=(-1)^{n+1}\left(\cancel{\frac{n+1}{x^{n+2}}}-\cancel{\frac{n+1}{x^{n+2}}}-\frac{1}{x^{n+3}}\right)e^{\frac{1}{x}}\\&=-(-1)^{n+1}\frac{1}{x^{n+3}}e^{\frac{1}{x}}\\&=(-1)^{n+2}\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^{n+3}}\end{aligned}$$

Cette expression correspond à ce que nous obtenons en remplaçant « n » par « $n+1$ » dans l'expression « $(-1)^{n+1}\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^{n+2}}$ ». L'égalité est donc vérifiée au rang $n+1$.

L'égalité est donc vérifiée pour tout entier naturel n.

Résultat final

Pour tout n entier naturel, en considérant la fonction f_n

définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f_n : x \mapsto x^n e^{\frac{1}{x}}$ on a :

$$f_n^{(n+1)}(x)=(-1)^{n+1}\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^{n+2}}$$