Soit a et b deux réels strictement positifs : $0 < a < b$.
Montrer qu'il existe un réel c dans l'intervalle $]a\,;b[$ tel que :

$$\frac{\sin b - \sin a}{\ln \frac{b}{a}} = c \cos c$$

Analyse

La forme de l'égalité doit nous faire penser au théorème des accroissements finis. Pour autant, le dénominateur du membre de gauche ne correspond pas à la forme « $b - a$ » du cours. Il convient donc de retrouver une telle forme …

Résolution

Comme on a $0 < a < b$, on peut poser : $a = e^A$ et $b = e^B$, soit $A = \ln a$ et $B = \ln b$.
Il vient alors :

$$\frac{\sin b - \sin a}{\ln \frac{b}{a}} = \frac{\sin b - \sin a}{\ln b - \ln a} = \frac{\sin\left(e^A\right) - \sin\left(e^B\right)}{B - A}$$

Considérons alors la fonction *f* définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \sin\left(e^x\right)$.

Elle est dérivable (et donc continue) sur $\mathbb{R}$ comme composée de deux fonctions dérivables sur cet intervalle (la fonction exponentielle et la fonction sinus).
Les hypothèses du théorème des accroissements finis sont donc vérifiées (continuité sur l'intervalle $[A\,;B]$ et dérivabilité sur l'intervalle $]A\,;B[$).

On en déduit l'existence d'un réel *D* dans l'intervalle $]A\,;B[$ tel que $f'(D) = \dfrac{f(B) - f(A)}{B - A}$.

Pour tout réel *x*, on a : $f'(x) = e^x \times \cos\left(e^x\right)$. D'où : $f'(D) = \dfrac{f(B) - f(A)}{B - A} = e^D \times \cos\left(e^D\right)$.

La fonction logarithme népérien définissant une bijection (strictement croissante) de $]a\,;b[$ dans $]\ln a\,;\ln b[=]A\,;B[$, il existe un unique réel *c* dans $]a\,;b[$ tel que $\ln c = D$.

On a finalement :

$$\frac{\sin b - \sin a}{\ln \frac{b}{a}} = \frac{\sin\left(e^A\right) - \sin\left(e^B\right)}{B - A} = \frac{f\left(B\right) - f\left(A\right)}{B - A} = e^D \times \cos\left(e^D\right) = c \cos c$$

Le résultat est ainsi établi.

Résultat final

Pour tous réels a et b strictement positifs : $0 < a < b$,
il existe un réel c dans l'intervalle $\left]a\,;b\right[$ tel que :

$$\frac{\sin b - \sin a}{\ln \frac{b}{a}} = c \cos c$$