

On considère les deux fonctions f et g définies sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = \frac{-2x+6}{x^2+1} \text{ et } g(x) = -x^2 - x + 4$$

On note \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g leurs courbes représentatives dans un même repère.

1. Calculer les dérivées f' et g' des fonctions f et g .
2. Montrer que le point $A(1; 2)$ est commun aux courbes \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g .
3. Montrer que \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g admettent une tangente commune \mathcal{T}_A en A .
Donner l'équation réduite de \mathcal{T}_A .
4. Etudier les variations de la fonction f et montrer que la courbe \mathcal{C}_f admet deux tangentes horizontales (on en donnera les équations).

Analyse

Autour d'une fonction rationnelle (f) et d'une fonction polynôme de degré 2, l'exercice propose une mise en œuvre de quelques concepts fondamentaux du thème de la dérivation : fonction dérivée, équation réduite de la tangente, variations et signe de la dérivée.

Résolution

Question 1.

Pour tout réel x , on a :

$$f'(x) = \frac{-2(x^2+1) - 2x(-2x+6)}{(x^2+1)^2} = \frac{-2x^2 - 2 + 4x^2 - 12x}{(x^2+1)^2} = 2 \frac{x^2 - 6x - 1}{(x^2+1)^2}$$

$$g'(x) = -2x - 1$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 2 \frac{x^2 - 6x - 1}{(x^2+1)^2} \text{ et } g'(x) = -2x - 1$$

Question 2.

On a :

$$f(1) = \frac{-2 \times 1 + 6}{1^2 + 1} = \frac{-2 + 6}{2} = \frac{4}{2} = 2 \text{ et } g(1) = -1^2 - 1 + 4 = -2 + 4 = 2$$

Comme $f(1) = g(1) = 2$, on en déduit immédiatement que le point de coordonnées $(1; 2)$ est un point d'intersection des courbes \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g .

Le point $A(1; 2)$ appartient aux courbes \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g .

Question 3.

Puisque les tangentes à \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g en A passent par le même point (!), il suffit ici de montrer qu'elles admettent le même coefficient directeur. On va donc comparer $f'(1)$ et $g'(1)$.

En utilisant les expressions obtenues à la première question, il vient :

$$f'(1) = 2 \frac{1^2 - 6 \times 1 - 1}{(1^2 + 1)^2} = 2 \frac{1 - 6 - 1}{(1 + 1)^2} = 2 \frac{-6}{4} = -3 \text{ et } g'(1) = -2 \times 1 - 1 = -2 - 1 = -3$$

Comme $f'(1) = g'(1)$, on en déduit que les deux tangentes sont parallèles. Comme elles passent toutes deux par le point A, elles sont confondues.

Les courbes \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g admettent une tangente commune en A.

Notons \mathcal{T}_A cette tangente commune.

Son équation réduite s'écrit :

$$\begin{aligned} y &= f'(1) \times (x - 1) + f(1) = g'(1) \times (x - 1) + g(1) \\ &= -3(x - 1) + 2 = -3x + 3 + 2 \\ &= -3x + 5 \end{aligned}$$

L'équation réduite de \mathcal{T}_A est :

$$y = -3x + 5$$

Question 4.

A la première question, on a vu que l'on avait : $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 2 \frac{x^2 - 6x - 1}{(x^2 + 1)^2}$.

Le dénominateur de la fraction $\frac{x^2 - 6x - 1}{(x^2 + 1)^2}$ est strictement positif en tant que carré non nul.

Le signe de $f'(x)$ est donc celui de $x^2 - 6x - 1$.

Le discriminant Δ associé à ce trinôme s'écrit : $\Delta = (-6)^2 - 4 \times 1 \times (-1) = 36 + 4 = 40$.

L'équation $x^2 - 6x - 1 = 0$ admet donc deux racines :

$$x_1 = \frac{-(-6) - \sqrt{40}}{2 \times 1} = \frac{6 - \sqrt{40}}{2} = \frac{6 - \sqrt{4 \times 10}}{2} = \frac{6 - 2\sqrt{10}}{2} = 3 - \sqrt{10}$$
$$x_2 = 3 + \sqrt{10}$$

Comme le coefficient de « x^2 » dans $x^2 - 6x - 1$ est positif et que l'on a $x_1 < x_2$, il vient :

- Si $x \in]-\infty ; 3 - \sqrt{10}[\cup]3 + \sqrt{10} ; +\infty[$ alors $f'(x) > 0$.
- $f'(x_1) = f'(x_2) = 0$.
- Si $x \in]3 - \sqrt{10} ; 3 + \sqrt{10}[$ alors $f'(x) < 0$.

Il en découle finalement :

La fonction f est strictement croissante sur les intervalles $]-\infty ; 3 - \sqrt{10}[$ et $]3 + \sqrt{10} ; +\infty[$.
La fonction f est strictement décroissante sur l'intervalle $]3 - \sqrt{10} ; 3 + \sqrt{10}[$.

Puisque l'on a $f'(x_1) = f'(x_2) = 0$, la courbe \mathcal{C}_f admet deux tangentes horizontales aux points d'abscisses $x_1 = 3 - \sqrt{10}$ et $x_2 = 3 + \sqrt{10}$.

Comme x_1 est solution de l'équation $x^2 - 6x - 1 = 0$, on a : $x_1^2 = 6x_1 + 1$.

D'où :

$$\begin{aligned} f(x_1) &= f(3 - \sqrt{10}) = \frac{-2x_1 + 6}{x_1^2 + 1} = \frac{-2x_1 + 6}{6x_1 + 1 + 1} = \frac{-2x_1 + 6}{6x_1 + 2} = \frac{-x_1 + 3}{3x_1 + 1} \\ &= \frac{-(3 - \sqrt{10}) + 3}{3(3 - \sqrt{10}) + 1} = \frac{-3 + \sqrt{10} + 3}{9 - 3\sqrt{10} + 1} = \frac{\sqrt{10}}{10 - 3\sqrt{10}} = \frac{1}{\sqrt{10} - 3} \\ &= \frac{\sqrt{10} + 3}{(\sqrt{10} - 3)(\sqrt{10} + 3)} = \frac{\sqrt{10} + 3}{\sqrt{10}^2 - 3^2} = \frac{\sqrt{10} + 3}{10 - 9} = \frac{\sqrt{10} + 3}{1} \\ &= 3 + \sqrt{10} = x_2 \end{aligned}$$

De façon similaire, on montre que l'on a : $f(x_2) = 3 - \sqrt{10} = x_1$.

Donc :

Les équations des deux tangentes horizontales à \mathcal{C}_f sont :

$$y = 3 + \sqrt{10} = x_2 \text{ et } y = 3 - \sqrt{10} = x_1.$$

Compléments

Comme $f(x_1) = x_2$ et $f(x_2) = x_1$, la courbe \mathcal{C}_f admet deux tangentes horizontales aux points $(x_1; x_2)$ et $(x_2; x_1)$. Dans un repère orthonormal, ces deux points sont symétriques par rapport à la première bissectrice (la droite d'équation $y = x$).

Nous fournissons ci-dessous les courbes représentatives \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g , les tangentes mentionnées dans l'exercice et la première bissectrice du repère. On notera également que l'on a fait apparaître les points B(-1; 4) et C(-2; 2) qui sont les deux autres points d'intersection (en plus de A) des courbes \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g (vérifiez-le !).

