Déterminer la dérivée et étudier les variations de la fonction *f* définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=\frac{x^2-4x+4}{3x^2+4x+4}$$

Analyse

Une application directe du cours : dérivation d'une fonction rationnelle (donc dérivation d'un rapport de deux fonctions) puis étude du signe de la dérivée pour obtenir les variations.

Résolution

On dérive classiquement cette fonction rationnelle comme un rapport.
En posant $u(x)=x^2-4x+4$ et $v(x)=3x^2+4x+4$, on a facilement :

$$u'(x)=2x-4\times1+0=2x-4=2(x-2)$$
$$v'(x)=3\times2x+4\times1+0=6x+4=2(3x+2)$$

On en tire :

$$\begin{aligned}f'(x)&=\frac{u'(x)\times v(x)-u(x)\times v'(x)}{(v(x))^2}\\&=\frac{2(x-2)\times(3x^2+4x+4)-(x^2-4x+4)\times2(3x+2)}{(3x^2+4x+4)^2}\\&=2\frac{(3x^3-2x^2-4x-8)-(3x^3-10x^2+4x+8)}{(3x^2+4x+4)^2}\\&=2\frac{8x^2-8x-16}{(3x^2+4x+4)^2}\\&=16\frac{x^2-x-2}{(3x^2+4x+4)^2}\end{aligned}$$

Pour tout x réel : $f'(x)=16\dfrac{x^2-x-2}{(3x^2+4x+4)^2}$.

On a : $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = 16\dfrac{x^2 - x - 2}{\left(3x^2 + 4x + 4\right)^2}$.

Le dénominateur de la fraction $\dfrac{x^2 - x - 2}{\left(3x^2 + 4x + 4\right)^2}$ est strictement positif en tant que carré non nul.

Le signe de $f'(x)$ est donc celui de $x^2 - x - 2$.

Le discriminant Δ associé à ce trinôme s'écrit : $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-2) = 1 + 8 = 9$.

L'équation $x^2 - x - 2 = 0$ admet donc deux racines :

$$x_1 = \frac{-(-1) - \sqrt{9}}{2 \times 1} = \frac{1-3}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$
$$x_1 = \frac{-(-1) + \sqrt{9}}{2 \times 1} = \frac{1+3}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

Comme le coefficient de « x^2 » dans $x^2 - x - 2$ est positif et que l'on a $x_1 < x_2$, il vient :

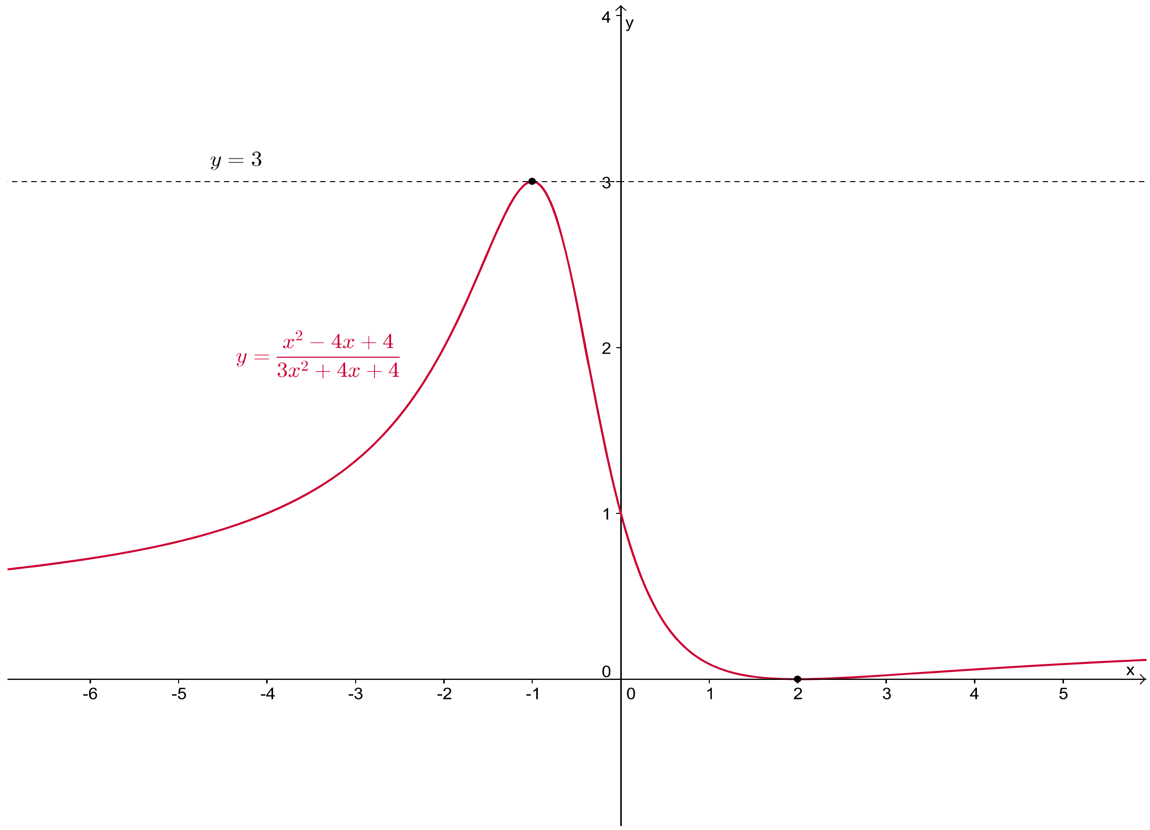
- Si $x \in \left]-\infty\,;-1\right[\cup \left]2\,;+\infty\right[$ alors $f'(x) > 0$.
- $f'(x_1) = f'(x_2) = 0$.
- Si $x \in \left]-1\,;2\right[$ alors $f'(x) < 0$.

Il en découle finalement :

La fonction *f* est strictement croissante sur les intervalles $\left]-\infty\,;-1\right]$ et $\left[2\,;+\infty\right[$.
La fonction *f* est strictement décroissante sur l'intervalle $\left[-1\,;2\right]$.

Compléments

Nous fournissons ci-après la courbe représentative de la fonction *f* dans un repère orthogonal.


$y = 3$
$y = \frac{x^2 - 4x + 4}{3x^2 + 4x + 4}$
x
y
-6
-5
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5
1
2
3
4