Dans cet exercice, on se propose de déterminer la fonction dérivée de la fonction :

$$f : x \mapsto \sqrt{x^2+1}$$

1. Justifier que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$.
2. On pose $g = f^2$. Calculer $g'(x)$ pour tout x réel.
3. Pour tout x réel, utiliser une formule du cours pour exprimer $g'(x)$ en fonction de $f(x)$ et $f'(x)$.
4. Déduire des deux questions précédentes $f'(x)$ en fonction de x.

Analyse

Dans le nouveau programme (2012) de la classe de Terminale ES, on ne dispose plus de la formule donnant directement la dérivée de la fonction $\sqrt{u}$, u étant une fonction dérivable prenant des valeurs strictement positives. Pour autant, à partir de la formule $\left(u^2\right)' = 2u'u$ on peut obtenir assez simplement de la dérivée d'une fonction de la forme $\sqrt{u}$ …

Résolution

Question 1.

Pour tout x réel, on a : $x^2 \geq 0$ et donc $x^2+1 \geq 1 > 0$. Ainsi, on pourra toujours évaluer $\sqrt{x^2+1}$.

La fonction f est bien définie sur $\mathbb{R}$.

Question 2.

Pour tout x réel, on a : $g(x) = f^2(x) = \left(f(x)\right)^2 = \sqrt{x^2+1}^2 = x^2+1$. On en déduit alors immédiatement : $g'(x) = 2x$.

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g'(x) = 2x$$

Question 3.

Comme $g = f^2$, on a : $g' = 2\times f'\times f$, soit : $\forall x \in \mathbb{R},\ g'(x) = 2\times f'(x)\times f(x)$.

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ g'(x) = 2\times f'(x)\times f(x)}$$

Question 4.

En tenant compte des deux questions précédentes, il vient :

$$\begin{aligned}
&\forall x \in \mathbb{R},\ g'(x) = 2\times f'(x)\times f(x)\\
\Leftrightarrow\ &\forall x \in \mathbb{R},\ 2x = 2\times f'(x)\times\sqrt{x^2+1}\\
\Leftrightarrow\ &\forall x \in \mathbb{R},\ x = f'(x)\times\sqrt{x^2+1}
\end{aligned}$$

A la première question, on a vu que l'on avait $x^2+1>0$ pour tout x réel.
On en déduit $\sqrt{x^2+1}>0$. L'égalité $x = f'(x)\times\sqrt{x^2+1}$ nous donne alors : $f'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}$$