

Soit  $n$  un entier naturel.

1. Calculer la dérivée  $n$ ième de la fonction  $x \mapsto x^n(1-x)^n$ .

2. En déduire la valeur de  $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2$ .

---

## Analyse

L'expression proposée de  $\varphi(x)$  suggère d'utiliser la formule de Leibniz pour calculer la dérivée  $n$ ième demandée. Mais à la deuxième question, on se doit d'utiliser une autre expression de  $\varphi(x)$  ...

---

## Résolution

### Question 1.

Soit  $n$  un entier naturel quelconque fixé.

Posons :  $\varphi(x) = x^n(1-x)^n = f(x) \times g(x)$  avec  $f(x) = x^n$  et  $g(x) = (1-x)^n$ .

Les fonctions  $f$  et  $g$  étant polynômiales, elles sont de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}$ .

La formule de Leibniz nous donne alors :

$$\varphi^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x)$$

Pour tout entier naturel  $k$  dans  $\llbracket 0; n \rrbracket$ , on a :

$$f^{(k)}(x) = n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)x^{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k}$$

$$g^{(k)}(x) = n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)(-1)^k(1-x)^{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!} (-1)^k (1-x)^{n-k}$$

On en déduit :  $g^{(n-k)}(x) = \frac{n!}{k!} (-1)^{n-k} (1-x)^k$ .

D'où :

$$\begin{aligned}\varphi^{(n)}(x) &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x) \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k} \frac{n!}{k!} (-1)^{n-k} (1-x)^k \\ &= \sum_{k=0}^n n! \binom{n}{k}^2 (-1)^{n-k} x^{n-k} (1-x)^k\end{aligned}$$

$$\varphi^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^n n! \binom{n}{k}^2 (-1)^{n-k} x^{n-k} (1-x)^k$$

### Question 2.

On a aussi, la fonction  $\varphi$  étant de degré  $2n$  :  $\varphi(x) = x^n (1-x)^n = (x-x^2)^n = (-1)^n x^{2n} + \dots$

La fonction  $\varphi^{(n)}$  est donc de degré  $2n - n = n$  et on a :

$$\begin{aligned}\varphi^{(n)}(x) &= (-1)^n 2n(2n-1)(2n-2)\dots(2n-n+1)x^n + \dots \\ &= (-1)^n \frac{(2n)!}{n!} x^n + \dots\end{aligned}$$

Dans la somme  $\varphi^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^n n! \binom{n}{k}^2 (-1)^{n-k} x^{n-k} (1-x)^k$ , chaque terme est une fonction polynômiale de degré  $n$  :

$$n! \binom{n}{k}^2 (-1)^{n-k} x^{n-k} (1-x)^k = n! \binom{n}{k}^2 (-1)^{n-k} [(-1)^k x^n + \dots] = n! \binom{n}{k}^2 (-1)^n [x^n + \dots]$$

Ainsi, le coefficient de «  $x^n$  » vaudra :  $\sum_{k=0}^n (-1)^n n! \binom{n}{k}^2 = (-1)^n n! \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2$ .

En identifiant ainsi les coefficients de «  $x^n$  », on obtient l'égalité :

$$(-1)^n \frac{(2n)!}{n!} = (-1)^n n! \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2$$

soit, finalement :  $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \frac{(2n)!}{(n!)^2}$ .

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \frac{(2n)!}{(n!)^2}$$