Soit a et b deux réels tels que $a<b$.
Soit f et g deux fonctions de $\left[a;b\right]$ dans $\mathbb{R}$, continues sur $\left[a;b\right]$ et dérivables sur $\left]a;b\right[$.
On suppose que l'on a : $\forall x\in\left]a;b\right[, g'(x)\neq 0$.

1. Montrer qu'il existe un réel c dans l'intervalle $\left]a;b\right[$ tel que :

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$$

   On appliquera le théorème de Rolle à $f-\lambda g$ où le réel λ devra être judicieusement choisi.

2. En déduire que si on a $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}}\frac{f'(x)}{g'(x)}=L$ alors $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}}\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=L$.

   (Règle de L'Hospital)

3. Application : déterminer $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-e^x}{(x+1)e^x-1}$.

Analyse

Dans cet exercice on établit une règle de calcul très classique (la règle de L'Hospital) permettant de lever des indéterminations du type « $\frac{0}{0}$ ».

Résolution

Question 1.

Comme la fonction g' ne s'annule pas sur l'intervalle $]a\,;b[$, on a :

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)} \Leftrightarrow f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\times g'(c) \Leftrightarrow f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\times g'(c)=0$$

Posons alors $\lambda=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$ et considérons la fonction φ définie sur l'intervalle $[a\,;b]$ par :

$$\varphi(x)=f(x)-\lambda\times g(x)=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\times g(x)$$

La fonction φ est continue sur l'intervalle $[a\,;b]$ car les fonctions *f* et *g* le sont.

On a, par ailleurs :

$$\begin{aligned}\varphi(a)&=f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\times g(a)\\&=\frac{[g(b)-g(a)]\times f(a)-[f(b)-f(a)]\times g(a)}{g(b)-g(a)}\\&=\frac{g(b)\times f(a)-f(b)\times g(a)}{g(b)-g(a)}\end{aligned}$$

Et :

$$\begin{aligned}\varphi(b)&=f(b)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\times g(b)\\&=\frac{[g(b)-g(a)]\times f(b)-[f(b)-f(a)]\times g(b)}{g(b)-g(a)}\\&=\frac{f(a)\times g(b)-g(a)\times f(b)}{g(b)-g(a)}\\&=\varphi(a)\end{aligned}$$

Enfin, la fonction φ est dérivable sur l'intervalle $]a\,;b[$ car les fonctions *f* et *g* le sont.

Le théorème de Rolle nous garantit alors l'existence d'un réel c dans l'intervalle $]a\,;b[$ tel que $\varphi'(c)=0$.

Or, pour tout x réel dans l'intervalle $]a\,;b[$, on a : $\varphi'(x) = f'(x) - \dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} \times g'(x)$.

On en déduit ainsi : $\varphi'(c) = f'(c) - \dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} \times g'(c) = 0$, c'est-à-dire :

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

$$\boxed{\exists c \in \,]a\,;b[\,/\ \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}}$$

Question 2.

On travaille sur l'intervalle $[a\,;x] \subset [a\,;b]$.

D'après la question précédente, il existe un réel c_x dans l'intervalle $]a\,;x[$ tel que :

$$\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)}$$

On a bien sûr : $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} c_x = a^+$. On en déduit :

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} \frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \lim_{\substack{c_x\to a\\ c_x>a}} \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} = L$$

Le résultat est ainsi établi.

$$\boxed{\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \Rightarrow \lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} \frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = L}$$

Question 3.

On considère ici les fonctions *f* et *g* définies sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$f(x) = \cos x - e^x \text{ et } g(x) = (x+1)e^x - 1$$

Notons que pour tout réel $x > 0$, on a : $e^x > 1$, $x+1 > 1$ et donc $(x+1)e^x > 1$, soit $g(x) > 0$.

Ainsi, le rapport $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ est bien défini sur $\mathbb{R}_+^*$.

On a : $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\left(\cos x - e^x\right) = f(0) = 1-1=0$ et
$\lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0}\left[(x+1)e^x - 1\right] = g(0) = 1\times 1 - 1 = 0$.

On a donc affaire à une forme indéterminée du type « $\frac{0}{0}$ ».

On a facilement : $f'(x) = -\sin x - e^x$ et $g'(x) = e^x + (x+1)e^x = (x+2)e^x$.

Il vient alors : $\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{-\sin x - e^x}{(x+2)e^x} = \frac{-0-1}{2\times 1} = -\frac{1}{2}$.
La règle de L'Hospital nous permet alors de conclure :

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{f(x)-f(0)}{g(x)-g(0)} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{\cos x - e^x}{(x+1)e^x - 1} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{f'(x)}{g'(x)} = -\frac{1}{2}.$$

$$\boxed{\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{\cos x - e^x}{(x+1)e^x - 1} = -\frac{1}{2}}$$