Soit $f :]0;1[\to \mathbb{R}$ dérivable et telle que :

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lambda \in \mathbb{R} \text{ et } \lim_{x\to 0}\left(x\, f'(x)\right) = \mu \in \mathbb{R}$$

Montrer que μ est nul.

Analyse

On a des exemples classiques de cette situation : $f(x) = x\ln(x)$ ou $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$. A chaque fois, on vérifiera que l'on a bien $\lim_{x\to 0}\left(x\, f'(x)\right) = 0$.

Pour établir le résultat général, on cherche des informations sur la dérivée de la fonction *f*. Au regard de la généralité des hypothèses, le théorème des accroissements finis semble être une bonne piste… Il reste à l'appliquer sur un intervalle judicieusement choisi.

Résolution

Comme $\lim_{x\to 0} f(x) = \lambda$, on peut prolonger *f* par continuité en 0.

On va donc désormais travailler avec la fonction $\hat{f}$ définie sur l'intervalle $[0\,;1[$ par :

$$\hat{f} : x \mapsto \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq 0 \\ \lambda & \text{sinon} \end{cases}$$

Par construction, la fonction $\hat{f}$ est continue sur l'intervalle $[0\,;1[$ et dérivable sur l'intervalle $]0\,;1[$.

Soit alors $x \in]0\,;1[$.

La fonction $\hat{f}$ est continue sur l'intervalle $[0\,;x]$ et dérivable sur l'intervalle $]0\,;x[$. D'après le théorème des accroissements finis, il existe un réel c_x dans $]0\,;x[$ tel que :

$$\hat{f}(x) - \hat{f}(0) = \hat{f}'(c_x) \times (x - 0)$$

C'est-à-dire : $f(x) - \lambda = f'(c_x) \times x$.

Comme c_x est non nul, il vient : $f(x)-\lambda = c_x \times f'(c_x)\times\frac{x}{c_x}$ puis, en tenant compte de $0 < c_x < x$:

$$\left|f(x)-\lambda\right| = \left|c_x \times f'(c_x)\right|\times\frac{x}{c_x} \geq \left|c_x \times f'(c_x)\right|$$

On a donc : $0 \leq \left|c_x \times f'(c_x)\right| \leq \left|f(x)-\lambda\right|$.
Comme $\lim_{x\to 0}\left(f(x)-\lambda\right)=0$, on a aussi : $\lim_{x\to 0}\left|f(x)-\lambda\right|=0$.
Mais quand *x* tend vers 0, il en va de même pour c_x. Ainsi :

$$\lim_{x\to 0}\left|c_x \times f'(c_x)\right| = \lim_{X\to 0}\left|X \times f'(X)\right| = |\mu|$$

On en déduit par le théorème des gendarmes que l'on a $|\mu|=0$ et donc, finalement, $\mu = 0$.
Le résultat est établi.