

Soit  $f : [0;1] \rightarrow \mathbb{R}$  dérivable à droite en 0 et telle que  $f(0) = 0$ .

Etudier la suite  $(u_n)$  où :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n^2}\right)$$

---

## Analyse

Dans cet exercice, il est essentiel de revenir aux fondamentaux, à savoir traduire la dérivabilité de  $f$  à droite en 0...

---

## Résolution

Notons  $f'_d(0)$  le nombre dérivé de  $f$  à droite en 0.

On a, pour tout réel  $x$  de l'intervalle  $[0;1]$ , en tenant compte de  $f(0) = 0$  :

$$f(x) = f(0) + f'_d(0)x + x\varepsilon(x) = f'_d(0)x + x\varepsilon(x)$$

où  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \varepsilon(x) = 0$ .

On a alors, pour tout entier naturel  $n$  non nul :

$$\begin{aligned} u_n &= \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n^2}\right) \\ &= \sum_{k=1}^n \left( f'_d(0) \times \frac{k}{n^2} + \frac{k}{n^2} \times \varepsilon\left(\frac{k}{n^2}\right) \right) \\ &= \frac{f'_d(0)}{n^2} \sum_{k=1}^n k + \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n \left( k \times \varepsilon\left(\frac{k}{n^2}\right) \right) \\ &= \frac{f'_d(0)}{n^2} \times \frac{n(n+1)}{2} + \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n \left( k \times \varepsilon\left(\frac{k}{n^2}\right) \right) \\ &= f'_d(0) \times \frac{n+1}{2n} + \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n \left( k \times \varepsilon\left(\frac{k}{n^2}\right) \right) \end{aligned}$$

On a immédiatement :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f'_d(0) \times \frac{n+1}{2n} = \frac{f'_d(0)}{2} \times \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{n} = \frac{f'_d(0)}{2} \times 1 = \frac{f'_d(0)}{2}$ .

On s'intéresse donc à  $\frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n \left( k \times \varepsilon \left( \frac{k}{n^2} \right) \right)$  et à la limite éventuelle de cette quantité quand  $n$  tend vers l'infini.

Notons d'abord que l'on a :  $\forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket, \frac{1}{n^2} \leq \frac{k}{n^2} \leq \frac{1}{n}$ .

Soit alors  $\varepsilon > 0$  fixé.

Comme  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \varepsilon(x) = 0$ , il existe un réel  $x_0$  dans l'intervalle  $[0; 1]$  tel que :

$$x \in [0; x_0] \Rightarrow |\varepsilon(x)| < \varepsilon$$

On en déduit l'existence d'un entier naturel  $N$  tel que :

$$n > N \Rightarrow \forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket, \left| \varepsilon \left( \frac{k}{n^2} \right) \right| < \varepsilon$$

Soit alors un entier naturel  $n$  quelconque tel que  $n > N$ . On a :

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n \left( k \times \varepsilon \left( \frac{k}{n^2} \right) \right) \right| &= \frac{1}{n^2} \left| \sum_{k=1}^n \left( k \times \varepsilon \left( \frac{k}{n^2} \right) \right) \right| \\ &\leq \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n \left| k \times \varepsilon \left( \frac{k}{n^2} \right) \right| \\ &= \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n k \left| \varepsilon \left( \frac{k}{n^2} \right) \right| \\ &\leq \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n k \varepsilon \\ &= \frac{\varepsilon}{n^2} \sum_{k=1}^n k \\ &= \frac{\varepsilon}{n^2} \times \frac{n(n+1)}{2} \\ &= \frac{(n+1)\varepsilon}{2n} \\ &\leq \varepsilon \end{aligned}$$

Ainsi, on a :  $\varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} / n > N \Rightarrow \left| \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n \left( k \times \varepsilon \left( \frac{k}{n^2} \right) \right) \right| \leq \varepsilon$ .

Soit :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n \left( k \times \varepsilon \left( \frac{k}{n^2} \right) \right) = 0$ .

Finalement, la suite  $(u_n)$  converge et sa limite est égale à  $\frac{f'_d(0)}{2}$ .