

Soit $f :]0;1[\rightarrow \mathbb{R}$ continue en 0.

On suppose que l'on a : $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{f(2x) - f(x)}{x} = L \in \mathbb{R}$

Montrer que f est dérivable à droite en 0.

Analyse

Remarquons que l'on a, pour tout réel x de l'intervalle $]0;1[$:

$$\frac{f(2x) - f(x)}{x} = \frac{f(2x) - f(0)}{x} - \frac{f(x) - f(0)}{x} = 2 \frac{f(2x) - f(0)}{2x} - \frac{f(x) - f(0)}{x}$$

Si on suppose alors f dérivable à droite en 0 et que l'on note $f'_d(0)$ le nombre dérivé correspondant, on a :

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{f(2x) - f(x)}{x} &= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \left(2 \frac{f(2x) - f(0)}{2x} - \frac{f(x) - f(0)}{x} \right) \\ &= 2 \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{f(2x) - f(0)}{2x} - \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{f(x) - f(0)}{x} \\ &= 2f'_d(0) - f'_d(0) \\ &= f'_d(0) \end{aligned}$$

Ainsi, l'exercice nous suggère une réciproque... et ce qui précède nous permet d'effectuer une conjecture, à savoir que l'on aurait : $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{f(x) - f(0)}{x} = L$.

A partir de $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{f(2x) - f(x)}{x} = L$, nous allons donc essayer de nous ramener en 0 où nous disposons d'une hypothèse forte sur f , la continuité.

Résolution

On a : $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{f(2x) - f(x)}{x} = L \Leftrightarrow \forall x \in \left]0; \frac{1}{2}\right[, f(2x) = f(x) + xL + x\varepsilon(x)$ avec $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \varepsilon(x) = 0$.

Soit aussi : $\forall x \in]0;1], f(x) = f\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{x}{2}L + \frac{x}{2}\varepsilon\left(\frac{x}{2}\right)$.

On a alors, pour tout réel x de l'intervalle $]0;1]$ et tout entier naturel n non nul (en toute rigueur, il conviendrait d'établir l'égalité par récurrence) :

$$\begin{aligned} \frac{f(x)-f(0)}{x} &= \frac{f\left(\frac{x}{2}\right)-f(0)}{x} + \frac{1}{2}L + \frac{1}{2}\varepsilon\left(\frac{x}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2} \frac{f\left(\frac{x}{2}\right)-f(0)}{\frac{x}{2}} + \frac{1}{2}L + \frac{1}{2}\varepsilon\left(\frac{x}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \frac{f\left(\frac{x}{4}\right)-f(0)}{\frac{x}{4}} + \frac{1}{2}L + \frac{1}{2}\varepsilon\left(\frac{x}{4}\right) \right) + \frac{1}{2}L + \frac{1}{2}\varepsilon\left(\frac{x}{2}\right) \\ &= \frac{1}{4} \frac{f\left(\frac{x}{4}\right)-f(0)}{\frac{x}{4}} + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right)L + \left(\frac{1}{2}\varepsilon\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{4}\varepsilon\left(\frac{x}{4}\right)\right) \\ &= \dots \\ &= \frac{f\left(\frac{x}{2^n}\right)-f(0)}{x} + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n}\right)L + \left(\frac{1}{2}\varepsilon\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{4}\varepsilon\left(\frac{x}{4}\right) + \dots + \frac{1}{2^n}\varepsilon\left(\frac{x}{2^n}\right)\right) \end{aligned}$$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x}{2^n} = 0$ et comme la fonction f est continue en 0, il vient : $\lim_{n \rightarrow +\infty} f\left(\frac{x}{2^n}\right) = f(0)$

puis : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f\left(\frac{x}{2^n}\right)-f(0)}{x} = \frac{0-0}{x} = 0$.

Par ailleurs, on a classiquement $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^n}$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n}\right) = 1$.

Enfin : $\left| \frac{1}{2}\varepsilon\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{4}\varepsilon\left(\frac{x}{4}\right) + \dots + \frac{1}{2^n}\varepsilon\left(\frac{x}{2^n}\right) \right| \leq \frac{1}{2}\left|\varepsilon\left(\frac{x}{2}\right)\right| + \frac{1}{4}\left|\varepsilon\left(\frac{x}{4}\right)\right| + \dots + \frac{1}{2^n}\left|\varepsilon\left(\frac{x}{2^n}\right)\right|$.

Comme $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \varepsilon(x) = 0$ on a, pour tout $\varepsilon > 0$ et tout x suffisamment petit : $|\varepsilon(x)| < \varepsilon$.

Pour tout entier naturel k , on a alors : $\left|\varepsilon\left(\frac{x}{2^k}\right)\right| < \varepsilon$ et finalement :

$$\frac{1}{2}\left|\varepsilon\left(\frac{x}{2}\right)\right| + \frac{1}{4}\left|\varepsilon\left(\frac{x}{4}\right)\right| + \dots + \frac{1}{2^n}\left|\varepsilon\left(\frac{x}{2^n}\right)\right| \leq \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n}\right)\varepsilon \leq \varepsilon$$

Soit alors $\varepsilon > 0$ fixé.

D'après ce qui précède, on a, pour tout entier naturel n non nul :

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(x) - f(0)}{x} - L \right| &= \left| \frac{f\left(\frac{x}{2^n}\right) - f(0)}{x} - \frac{L}{2^n} + \left(\frac{1}{2} \varepsilon \left(\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{4} \varepsilon \left(\frac{x}{4}\right) + \dots + \frac{1}{2^n} \varepsilon \left(\frac{x}{2^n}\right) \right) \right| \\ &\leq \left| \frac{f\left(\frac{x}{2^n}\right) - f(0)}{x} \right| + \left| \frac{L}{2^n} \right| + \left| \frac{1}{2} \varepsilon \left(\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{4} \varepsilon \left(\frac{x}{4}\right) + \dots + \frac{1}{2^n} \varepsilon \left(\frac{x}{2^n}\right) \right| \end{aligned}$$

Et, pour x suffisamment petit :

$$\left| \frac{f(x) - f(0)}{x} - L \right| \leq \left| \frac{f\left(\frac{x}{2^n}\right) - f(0)}{x} \right| + \left| \frac{L}{2^n} \right| + \varepsilon$$

En passant à la limite (sur n), il vient finalement :

$$\left| \frac{f(x) - f(0)}{x} - L \right| \leq \varepsilon$$

On en déduit finalement : $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \left(\frac{f(x) - f(0)}{x} - L \right) = 0$, c'est-à-dire : $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{f(x) - f(0)}{x} = L$.

La fonction f est bien dérivable à droite en 0 et on a : $f'_d(0) = L = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{f(2x) - f(x)}{x}$.

Résultat final

Si f est une fonction définie sur $[0; 1]$, continue en 0 et vérifiant $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{f(2x) - f(x)}{x} = L \in \mathbb{R}$
alors f est dérivable à droite en 0 et $f'_d(0) = L$.