Résoudre :

$$\begin{cases} 4x & & + & 3z & = & 7 \\ x & & + & 2z & = & 8 \\ 3x & + \; 4y & + & z & = & 1 \end{cases} \qquad (\mathrm{S})$$

Analyse

Le système proposé est en fait constitué d'un sous-système de deux équations à deux inconnues (les deux premières lignes avec les inconnues x et z) et d'une troisième équation (troisième ligne) permettant d'exprimer l'inconnue y en fonction des deux premières. On commence donc par résoudre le sous-système.

Résolution

Nous commençons donc par résoudre le système (S') suivant :

$$\begin{cases} 4x + 3z = 7 & (\mathrm{L}_1) \\ x + 2z = 8 & (\mathrm{L}_2) \end{cases}$$

On peut, par exemple, éliminer l'inconnue x en considérant l'opération suivante sur les lignes : $(\mathrm{L}_1) - 4(\mathrm{L}_2)$. On obtient ainsi :

$$3z - 4\times 2z = 7 - 4\times 8 \Leftrightarrow -5z = -25 \Leftrightarrow \boxed{z = 5}$$

L'équation correspondant à la ligne (L_2) de (S') nous permet alors d'obtenir l'inconnue x :

$$x + 2z = 8 \Leftrightarrow x + 2\times 5 = 8 \Leftrightarrow \boxed{x = -2}$$

On peut maintenant considérer la troisième ligne du système initial (S) pour calculer y :

$$3x + 4y + z = 1 \Leftrightarrow 4y + 3\times(-2) + 5 = 1 \Leftrightarrow 4y = 2 \Leftrightarrow \boxed{y = \frac{1}{2}}$$

L'unique solution du système (S) est donc le triplet : $\left(-2, \frac{1}{2}, 5\right)$.

Résultat final

L'unique solution du système (S) est le triplet : $\left(-2,\frac{1}{2},5\right)$.