Résoudre :

$$\begin{cases} x + 2y - 5z = 5 \\ 2x - y + z = -7 \\ -3x + y + 4z = 0 \end{cases} \qquad (S)$$

Analyse

Le système proposé permet de commencer par éliminer l'une des trois inconnues au choix puisque chaque ligne fait apparaître l'une des trois inconnues avec un coefficient de 1. Nous fournissons deux méthodes de résolution : la première où l'on commence par éliminer l'inconnue x dans la deuxième et la troisième ligne ; la seconde où l'on commence par éliminer l'inconnue y dans la première et la deuxième ligne. La dernière possibilité (élimination de l'inconnue z dans la première et la troisième ligne) vous est laissée en guise d'entraînement.

Résolution

1ère méthode

$$\begin{cases} x + 2y - 5z = 5 & (\mathrm{L}_1) \\ 2x - y + z = -7 & (\mathrm{L}_2) \\ -3x + y + 4z = 0 & (\mathrm{L}_3) \end{cases}$$

Nous éliminons l'inconnue x dans la deuxième et la troisième ligne en effectuant les opérations suivantes sur les lignes :

$(\mathrm{L}_2)-2(\mathrm{L}_1)$ qui donne : $-y-2\times 2y+z-2\times(-5z)=-7-2\times 5 \Leftrightarrow \underline{-5y+11z=-17}$

$(\mathrm{L}_3)+3(\mathrm{L}_1)$ qui donne : $y+3\times 2y+4z+3\times(-5z)=0+3\times 5 \Leftrightarrow \underline{7y-11z=15}$

On obtient ainsi un système de deux équations à deux inconnues :

$$\begin{cases} -5y + 11z = -17 \\ 7y - 11z = 15 \end{cases}$$

En additionnant les deux lignes, on obtient : $7y-5y=15-17 \Leftrightarrow 2y=-2 \Leftrightarrow \boxed{y=-1}$

En considérant alors la première ligne, par exemple, on obtient la valeur de z :

$$(-5)\times(-1)+11z=-17 \Leftrightarrow 5+11z=-17 \Leftrightarrow 11z=-22 \Leftrightarrow \boxed{z=-2}$$

On peut enfin, pour obtenir la valeur de l'inconnue x, considérer l'une des trois lignes du système initial. Nous choisissons celle où le coefficient de x vaut 1, c'est à dire (L_1).
Il vient :

$$x+2y-5z=5 \Leftrightarrow x=-2y+5z+5=(-2)\times(-1)+5\times(-2)+5=2-10+5=-3$$

Finalement : $\boxed{x=-3}$

L'unique solution du système (S) est le triplet : $(-3,-1,-2)$.

2ème méthode

$$\begin{cases} x + 2y - 5z = 5 & (\mathrm{L}_1) \\ 2x - y + z = -7 & (\mathrm{L}_2) \\ -3x + y + 4z = 0 & (\mathrm{L}_3) \end{cases}$$

Cette fois, nous éliminons l'inconnue y dans la première et la deuxième ligne en effectuant les opérations suivantes sur les lignes :

$(\mathrm{L}_1)-2(\mathrm{L}_3)$ qui donne : $x-2\times(-3x)+-5z-2\times 4z=5-2\times 0 \Leftrightarrow \underline{7x-13z=5}$
$(\mathrm{L}_2)+(\mathrm{L}_3)$ qui donne : $2x-3x+z+4z=-7+0 \Leftrightarrow \underline{-x+5z=-7}$

On obtient ainsi un système de deux équations à deux inconnues :

$$\begin{cases} 7x - 13z = 5 & (\mathrm{L}_1') \\ -x + 5z = -7 & (\mathrm{L}_2') \end{cases}$$

En effectuant alors l'opération suivante sur les ligne, on élimine l'inconnue x :

$(\mathrm{L}_1')+7(\mathrm{L}_2')$ qui donne : $-13z+7\times 5z=5+7\times(-7) \Leftrightarrow 22z=-44 \Leftrightarrow \boxed{z=-2}$

(L_2') nous donne alors : $x=5z+7=5\times(-2)+7=-10+7=-3$.
$\boxed{x=-3}$

On peut enfin, pour obtenir la valeur de l'inconnue y, considérer l'une des trois lignes du système initial. Nous choisissons celle où le coefficient de y vaut 1, c'est à dire (L_3).

Il vient :

$$-3x+y+4z=0 \Leftrightarrow y=3x-4z=3\times(-3)-4\times(-2)=-9+8=-1$$

Finalement : $\boxed{y=-1}$

On a retrouvé le triplet solution obtenu avec la première méthode.

Résultat final

L'unique solution du système (S) est le triplet : $(-3\,;-1\,;-2)$.