Résoudre :

$$\begin{cases} x + 3y + 3z + 7t = 1 \\ -2x - y + z + t = 0 \\ 2x + 2y + 5z + 3t = 5 \\ -3x + y - z - 2t = -5 \end{cases} \qquad (S)$$

Analyse

Le système comporte quatre équations et quatre inconnues. On le résout classiquement en utilisant la méthode de Gauss.

Résolution

Soit donc le système (S) pourvu d'une identification de ses lignes :

$$\begin{cases} x + 3y + 3z + 7t = 1 & (\mathrm{L}_1) \\ -2x - y + z + t = 0 & (\mathrm{L}_2) \\ 2x + 2y + 5z + 3t = 5 & (\mathrm{L}_3) \\ -3x + y - z - 2t = -5 & (\mathrm{L}_4) \end{cases}$$

On commence par éliminer l'inconnue x dans les lignes (L_2), (L_3) et (L_4) en effectuant les transformations suivantes :

$(\mathrm{L}_2)+2(\mathrm{L}_1)$ qui donne : $(-y+6y)+(z+6z)+(t+14t)=0+2 \Leftrightarrow \underline{5y+7z+15t=2|}$

$(\mathrm{L}_3)-2(\mathrm{L}_1)$ qui donne : $(2y-6y)+(5z-6z)+(3t-14t)=5-2 \Leftrightarrow \underline{-4y-z-11t=3|}$

$(\mathrm{L}_4)+3(\mathrm{L}_1)$ qui donne : $(y+9y)+(-z+9z)+(-2t+21t)=-5+3 \Leftrightarrow \underline{10y+8z+19t=-2|}$

Le système (S) est donc équivalent au nouveau système :

$$\begin{cases} x + 3y + 3z + 7t = 1 & (\mathrm{L}_1) \\ 5y + 7z + 15t = 2 & (\mathrm{L'}_2) \\ -4y - z - 11t = 3 & (\mathrm{L'}_3) \\ 10y + 8z + 19t = -2 & (\mathrm{L'}_4) \end{cases}$$

L'inconnue qui apparaît désormais avec le coefficient le plus simple à manipuler est z dans la ligne (L'_3).

Nous allons, dans un premier temps multiplier cette ligne par –1 afin que le coefficient de z soit désormais 1. On obtient :

$$\begin{cases} x + 3y + 3z + 7t = 1 & (\mathrm{L}_1) \\ 5y + 7z + 15t = 2 & (\mathrm{L}'_2) \\ 4y + z + 11t = -3 & (\mathrm{L}''_3) = -(\mathrm{L}'_3) \\ 10y + 8z + 19t = -2 & (\mathrm{L}'_4) \end{cases}$$

On peut alors éliminer l'inconnue z dans les lignes (L'_2) et (L'_4) en effectuant les transformations suivantes :

$(\mathrm{L}'_2) - 7(\mathrm{L}''_3)$ qui donne : $(5y - 28y) + (15t - 77t) = 2 + 21 \Leftrightarrow \underline{-23y - 62t = 23}$

$(\mathrm{L}'_4) - 8(\mathrm{L}''_3)$ qui donne : $(10y - 32y) + (19t - 88t) = -2 + 24 \Leftrightarrow \underline{-22y - 69t = 22}$

Le système (S) est donc équivalent au nouveau système :

$$\begin{cases} x + 3y + 3z + 7t = 1 & (\mathrm{L}_1) \\ -23y - 62t = 23 & (\mathrm{L}''_2) \\ 4y + z + 11t = -3 & (\mathrm{L}''_3) \\ -22y - 69t = 22 & (\mathrm{L}''_4) \end{cases}$$

Les lignes (L''_2) et (L''_4) conduisent à résoudre le système de deux équations à deux inconnues suivant :

$$\begin{cases} -23y - 62t = 23 & (\mathrm{L}''_2) \\ -22y - 69t = 22 & (\mathrm{L}''_4) \end{cases}$$

En divisant chacune des lignes par le coefficient de l'inconnue y, ce système se récrit :

$$\begin{cases} y + \dfrac{62}{23}t = -1 \\ y + \dfrac{69}{22}t = -1 \end{cases}$$

Les coefficients de l'inconnue t étant différents et les seconds membres des égalités égaux, on obtient immédiatement : $\boxed{y = -1}$ et $\boxed{t = 0}$.

La ligne (L''_3) s'écrit alors : $4y + z + 11t = -3 \Leftrightarrow -4 + z = -3$ soit : $\boxed{z = 1}$.

Enfin, on utilise la ligne (L_1) du système initial pour obtenir la valeur de l'inconnue x :

$$x+3y+3z+7t=1 \Leftrightarrow x=-3y-3z-7t+1=3-3+1=1.$$

Soit : $\boxed{x=1}$.

L'unique solution du système (S) est donc le quadruplet : $(1\,;-1\,;1\,;0)$.

Résultat final

L'unique solution du système (S) est le quadruplet : $(1\,;-1\,;1\,;0)$.