Résoudre :

$$\begin{cases} 3x + 5y + 2z = -3 \\ -2x - 3y - 2z = 7 \\ -7x + 4y - 3z = 11 \end{cases} \qquad (S)$$

Analyse

Les coefficients de l'inconnues *z* dans la première et la deuxième ligne nous poussent à commencer par éliminer cette inconnue dans deux des trois lignes du système.

Résolution

Nous notons les lignes du système comme suit :

$$\begin{cases} 3x + 5y + 2z = -3 & (\mathrm{L}_1) \\ -2x - 3y - 2z = 7 & (\mathrm{L}_2) \\ -7x + 4y - 3z = 11 & (\mathrm{L}_3) \end{cases}$$

Nous éliminons l'inconnue *z* dans la première et la troisième ligne en effectuant les opérations suivantes sur les lignes :

$(\mathrm{L}_1)+(\mathrm{L}_2)$ qui donne : $(3x-2x)+(5y-3y)=7-3 \Leftrightarrow \underline{x+2y=4|}$

$(\mathrm{L}_3)-\frac{3}{2}(\mathrm{L}_2)$ qui donne : $(-7x+3x)+\left(4y+\frac{9}{2}y\right)=11-\frac{21}{2} \Leftrightarrow \underline{-4x+\frac{17}{2}y=\frac{1}{2}|}$

Nous obtenons alors le nouveau système :

$$\begin{cases} -2x - 3y - 2z = 7 & (\mathrm{L'}_1)=(\mathrm{L}_2) \\ x + 2y = 4 & (\mathrm{L'}_2) \\ -4x + \frac{17}{2}y = \frac{1}{2} & (\mathrm{L'}_3) \end{cases}$$

Afin de simplifier l'écriture, nous multiplions la dernière ligne par 2 :

$$\begin{cases} -2x & - & 3y & - & 2z & = & 7 & \quad (\text{L}''_1) = (\text{L}'_1) = (\text{L}_2) \\ x & + & 2y & & & = & 4 & \quad (\text{L}''_2) = (\text{L}'_2) \\ -8x & + & 17y & & & = & 1 & \quad (\text{L}''_3) = 2(\text{L}'_3) \end{cases}$$

On peut enfin éliminer l'inconnue x dans la dernière ligne en effectuant l'opération suivante :

$(\text{L}''_3) + 8(\text{L}''_2)$ qui donne : $17y + 16y = 1 + 32 \Leftrightarrow \underline{33y = 33}$

Il vient donc : $\boxed{y = 1}$

(L''_2) fournit alors : $x = -2y + 4 = -2 + 4 = 2$. Soit : $\boxed{x = 2}$

Enfin, on obtient la valeur de l'inconnue z en utilisant (L_2) :

$$-2x - 3y - 2z = 7 \Leftrightarrow z = \frac{1}{2}(-2x - 3y - 7) = \frac{1}{2}(-4 - 3 - 7) = \frac{1}{2}(-14) = -7$$

Soit : $\boxed{z = -7}$

L'unique solution du système (S) est le triplet : $(2\,;1\,;-7)$.

Résultat final

L'unique solution du système (S) est le triplet : $(2\,;1\,;-7)$.