

Résoudre :

$$\begin{cases} x + 2y + 3z - t = 4 \\ 2x + y + 5z - t = 4 \\ -3x + 8y + z + t = 4 \\ 2x - y - z - 3t = 4 \end{cases} \quad (S)$$

Analyse

Le système comporte quatre équations et quatre inconnues. On le résout classiquement en utilisant la méthode de Gauss.

Résolution

Soit donc le système (S) pourvu d'une identification de ses lignes :

$$\begin{cases} x + 2y + 3z - t = 4 & (L_1) \\ 2x + y + 5z - t = 4 & (L_2) \\ -3x + 8y + z + t = 4 & (L_3) \\ 2x - y - z - 3t = 4 & (L_4) \end{cases}$$

On commence par éliminer l'inconnue x dans les lignes (L_2) , (L_3) et (L_4) en effectuant les transformations suivantes :

$$(L_2) - 2(L_1) \text{ qui donne : } (y - 4y) + (5z - 6z) + (-t + 2t) = 4 - 8 \Leftrightarrow \underline{-3y - z + t = -4}$$

$$(L_3) + 3(L_1) \text{ qui donne : } (8y + 6y) + (z + 9z) + (t - 3t) = 4 + 12 \Leftrightarrow \underline{14y + 10z - 2t = 16}$$

$$(L_4) - 2(L_1) \text{ qui donne : } (-y - 4y) + (-z - 6z) + (-3t + 2t) = 4 - 8 \Leftrightarrow \underline{-5y - 7z - t = -4}$$

Le système (S) est donc équivalent au nouveau système :

$$\begin{cases} x + 2y + 3z - t = 4 & (L'_1) = (L_1) \\ -3y - z + t = -4 & (L'_2) \\ 14y + 10z - 2t = 16 & (L'_3) \\ -5y - 7z - t = -4 & (L'_4) \end{cases}$$

L'inconnue qui apparaît désormais avec les coefficients les plus simples à manipuler est t .

On peut éliminer cette inconnue dans les lignes (L'_3) et (L'_4) et conserver la ligne (L'_2) .
Nous effectuons donc les transformations suivantes :

$$(L'_3) + 2(L'_2) \text{ qui donne : } (14y - 6y) + (10z - 2z) = 16 - 8 \Leftrightarrow 8y + 8z = 8 \Leftrightarrow \underline{y + z = 1}$$

$$(L'_4) + (L'_2) \text{ qui donne : } (-5y - 3y) + (-7z - z) = -4 - 4 \Leftrightarrow -8y - 8z = -8 \Leftrightarrow \underline{y + z = 1}$$

On obtient deux nouvelles équations identiques. Le système initial est donc équivalent au nouveau système :

$$\begin{cases} x + 2y + 3z - t = 4 \\ -3y - z + t = -4 \\ y + z = 1 \end{cases}$$

La dernière ligne nous laisse le choix d'exprimer les inconnues en fonction de l'inconnue y ou de l'inconnue z . Fournissons les détails pour le premier choix.

La dernière ligne se réécrit : $\boxed{z = -y + 1}$.

L'avant-dernière ligne nous donne alors : $t = 3y + z - 4 \Leftrightarrow t = 3y - y + 1 - 4 \Leftrightarrow \boxed{t = 2y - 3}$.

Il vient enfin, grâce à la première ligne :

$$x = -2y - 3z + t + 4 \Leftrightarrow x = -2y - 3(-y + 1) + 2y - 3 + 4 \Leftrightarrow \boxed{x = 3y - 2}$$

Le système (S) admet donc une infinité de solutions.

Ce sont tous les quadruplets de la forme : $(3y - 2; y; -y + 1; 2y - 3)$ où y est un réel quelconque.

Si nous avons choisi d'exprimer les inconnues en fonction de l'inconnue z en partant de $y = -z + 1$, nous aurions obtenu : $t = -2z - 1$ et $x = -3z + 1$. Dans ce cas, les quadruplets solutions de (S) auraient été écrits comme suit : $(-3z + 1; -z + 1; z; -2z - 1)$.

Résultat final

Les solutions du système (S) sont les quadruplets de la forme :
 $(3y - 2; y; -y + 1; 2y - 3)$
où y est un réel quelconque.