Résoudre :

$$\begin{cases} x + 2y = -9 \\ 2x + y + 3z = 6a-5 \\ x + y + z = -4 \end{cases} \qquad (S)$$

où a est un paramètre réel.

Analyse

Au regard de la première ligne, on peut commencer par éliminer l'inconnue z dans la deuxième ligne.

Résolution

$$\begin{cases} x + 2y = -9 & (\mathrm{L}_1) \\ 2x + y + 3z = 6a-5 & (\mathrm{L}_2) \\ x + y + z = -4 & (\mathrm{L}_3) \end{cases}$$

Nous éliminons l'inconnue z dans la deuxième ligne en effectuant l'opération $(\mathrm{L}_2)-3(\mathrm{L}_3)$ qui donne : $(2x-3x)+(y-3y)=6a-5+12 \Leftrightarrow -x-2y=6a+7 \Leftrightarrow \underline{x+2y=-6a-7}$

Le système initial est ainsi équivalent au système suivant :

$$\begin{cases} x + 2y = -9 & (\mathrm{L'}_1)=(\mathrm{L}_1) \\ x + 2y = -6a-7 & (\mathrm{L'}_2)=(\mathrm{L}_2)-3(\mathrm{L}_3) \\ x + y + z = -4 & (\mathrm{L'}_3)=(\mathrm{L}_3) \end{cases}$$

Les deux premières lignes, qui constituent un système de deux équations à deux inconnues admettent des solutions si, et seulement si, on a l'égalité des membres de droites :

$$-6a-7=-9 \Leftrightarrow 6a=2 \Leftrightarrow a=\frac{1}{3}$$

On doit donc mener une discussions suivant que le paramètre a est, ou non, égal à $\frac{1}{3}$.

$\boxed{\rightarrow 1^{\text{er}} \text{ cas : } a \neq \frac{1}{3}}$

Dans ce cas, les deux premières lignes sont incompatibles et le système n'admet pas de solution.

$\boxed{\rightarrow 2^{\text{ème}} \text{ cas : } a = \frac{1}{3}}$

Le système initial est équivalent au système suivant :

$$\begin{cases} x + 2y = -9 \\ x + y + z = -4 \end{cases}$$

On peut, par exemple, choisir d'exprimer les inconnues x et z en fonction de y.

La première ligne donne : $\boxed{x = -2y - 9}$.

La deuxième ligne donne alors : $z = -x - y - 4 \Leftrightarrow z = 2y + 9 - y - 4 \Leftrightarrow \boxed{z = y + 5}$

Le système (S) admet une infinité de solutions.
Ce sont les triplets de la forme : $(-2y - 9 ; y ; y + 5)$ où y est un réel quelconque.

Résultat final

Si $a \neq \frac{1}{3}$, le système (S) n'admet pas de solution.

Si $a = \frac{1}{3}$, le système (S) admet une infinité de solutions :

$$\{(-2y - 9 ; y ; y + 5) / y \in \mathbb{R}\}$$