

Soit \mathbb{K} un corps de caractéristique nulle.

On considère f_1 , f_2 et f_3 les trois formes linéaires suivantes définies sur \mathbb{K}^3 :

$$f_1 : (x, y, z) \mapsto x + y - z$$

$$f_2 : (x, y, z) \mapsto x - y + z$$

$$f_3 : (x, y, z) \mapsto x + y + z$$

1. Montrer que (f_1, f_2, f_3) est une base de $(\mathbb{K}^3)^*$.
2. Dans cette question on suppose $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} . Déterminer la base duale associée à (f_1, f_2, f_3) .

Analyse

Un exercice de dualité simple pour s'entraîner à la maîtrise des notations du cours et à la mise en œuvre des concepts.

Résolution

Question 1.

L'espace vectoriel $(\mathbb{K}^3)^*$ est de dimension 3 (i.e. celle du \mathbb{K} -espace vectoriel \mathbb{K}^3). Pour démontrer que la famille (f_1, f_2, f_3) en est une base, il nous suffit, par exemple, de démontrer qu'elle est libre. Soit alors a , b et c trois éléments de \mathbb{K} tels que $a f_1 + b f_2 + c f_3 = 0^*$ (0^* désignant la forme linéaire nulle sur \mathbb{K}^3). On a les équivalences :

$$\begin{aligned} a f_1 + b f_2 + c f_3 &= 0^* \\ \Leftrightarrow \forall (x, y, z) \in \mathbb{K}^3, (a f_1 + b f_2 + c f_3)(x, y, z) &= 0 \\ \Leftrightarrow \forall (x, y, z) \in \mathbb{K}^3, a f_1(x, y, z) + b f_2(x, y, z) + c f_3(x, y, z) &= 0 \\ \Leftrightarrow \forall (x, y, z) \in \mathbb{K}^3, a(x + y - z) + b(x - y + z) + c(x + y + z) &= 0 \\ \Leftrightarrow \forall (x, y, z) \in \mathbb{K}^3, (a + b + c)x + (a - b + c)y + (-a + b + c)z &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} a + b + c = 0 \\ a - b + c = 0 \\ -a + b + c = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$a - b + c = 0$ et $-a + b + c = 0$ donnent (addition) : $c + c = 2c = 0$ et, le corps \mathbb{K} étant de caractéristique nulle, on en déduit : $c = 0$.

Les deux premières équations donnent alors (somme) : $a + a = 2a = 0$ et on en déduit cette fois : $a = 0$.

L'une quelconque des trois équations nous donne enfin : $b = 0$.

On déduit de ce qui précède que la famille (f_1, f_2, f_3) est libre et donc qu'il s'agit d'une base de $(\mathbb{K}^3)^*$.

On pouvait également introduire la base canonique de $(\mathbb{K}^3)^*$: (e_1^*, e_2^*, e_3^*) (rappelons que l'on a : $e_1^*(x, y, z) \mapsto x$, $e_2^*(x, y, z) \mapsto y$ et $e_3^*(x, y, z) \mapsto z$). On a simplement : $f_1 = e_1^* + e_2^* - e_3^*$, $f_2 = e_1^* - e_2^* + e_3^*$ et $f_3 = e_1^* + e_2^* + e_3^*$. Ainsi, on peut considérer l'application linéaire φ de $(\mathbb{K}^3)^*$ dans $(\mathbb{K}^3)^*$ définie par $\forall i \in \{1; 2; 3\}, \varphi(e_i^*) = f_i$ et de matrice P dans la base (e_1^*, e_2^*, e_3^*) :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

On montre facilement qu'elle est inversible (son déterminant vaut, par exemple, -4). Il s'agit donc d'un automorphisme de $(\mathbb{K}^3)^*$ et la famille image (f_1, f_2, f_3) est ainsi une autre base de $(\mathbb{K}^3)^*$.

La famille (f_1, f_2, f_3) est une base de $(\mathbb{K}^3)^*$.

Question 2.

Notons (f_1^*, f_2^*, f_3^*) la base de $((\mathbb{K}^3)^*)^*$ associée à (f_1, f_2, f_3) .

Par définition, on a, pour tout couple d'entiers (i, j) dans $\{1; 2; 3\}$: $f_i^*(f_j) = \delta_{ij}$ (symbole de Kronecker. Bien prendre garde au fait que $\delta_{ii} = 1$ est l'élément neutre de la deuxième loi du corps \mathbb{K} . Ici, il s'agit du réel 1.).

Soit alors : $f : (x, y, z) \mapsto \alpha x + \beta y + \gamma z$ une forme linéaire quelconque sur \mathbb{K}^3 .

Posons : $f_1^*(f) = a\alpha + b\beta + c\gamma$.

Ici, on cherche les scalaires a, b et c .

Avec $f_1 : f_1^*(f_1) = \delta_{11} = 1 \Leftrightarrow a + b - c = 1$.

Avec $f_2 : f_1^*(f_2) = \delta_{12} = 0 \Leftrightarrow a - b + c = 0$.

Avec $f_3 : f_1^*(f_3) = \delta_{13} = 0 \Leftrightarrow a + b + c = 0$.

On doit ainsi résoudre le système :

$$\begin{cases} a + b - c = 1 \\ a - b + c = 0 \\ a + b + c = 0 \end{cases}$$

Les deux premières égalités donnent : $a + a = 2a = 1$. D'où : $a = \frac{1}{2}$.

En additionnant membre à membre les égalités 2 et 3, on obtient : $2a + 2c = 0$ et on en tire :

$$c = -a = -\frac{1}{2}.$$

L'une des trois équation donne alors : $b = 0$.

$$\text{Finalement : } (a, b, c) = \left(\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}\right).$$

En soulignant que : $f : (x, y, z) \mapsto \alpha x + \beta y + \gamma z = (\alpha e_1^* + \beta e_2^* + \gamma e_3^*)(x, y, z)$, on a :

$$f = \alpha e_1^* + \beta e_2^* + \gamma e_3^* = e_1^{**}(f) e_1^* + e_2^{**}(f) e_2^* + e_3^{**}(f) e_3^*.$$

$$\text{Alors : } f_1^*(f) = \frac{1}{2} e_1^{**}(f) - \frac{1}{2} e_3^{**}(f) = \left(\frac{1}{2} e_1^{**} - \frac{1}{2} e_3^{**}\right)(f).$$

$$\text{Finalement : } f_1^* = \frac{1}{2} e_1^{**} - \frac{1}{2} e_3^{**}.$$

En procédant de façon analogue, on obtient : $f_2^* = \frac{1}{2} e_1^{**} - \frac{1}{2} e_2^{**}$ et $f_3^* = \frac{1}{2} e_2^{**} + \frac{1}{2} e_3^{**}$.

$$f_1^* = \frac{1}{2} e_1^{**} - \frac{1}{2} e_3^{**}, f_2^* = \frac{1}{2} e_1^{**} - \frac{1}{2} e_2^{**} \text{ et } f_3^* = \frac{1}{2} e_2^{**} + \frac{1}{2} e_3^{**}.$$