

Soit le  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel  $E = \mathbb{R}_3[X]$ .

Pour tout entier naturel  $i$  dans  $\{0;1;2;3\}$ , on définit la forme linéaire :

$$f_i : P \mapsto \int_{-1}^1 t^i P(t) dt$$

1. Montrer que  $(f_0, f_1, f_2, f_3)$  est une base de  $E^*$ .
2. Déterminer la base préduale de  $(f_0, f_1, f_2, f_3)$ .

---

## Analyse

Un exercice de dualité simple (mais ... un peu calculatoire !) pour s'entraîner à la maîtrise des notations du cours et à la mise en œuvre des concepts.

---

## Résolution

### Question 1.

L'espace vectoriel  $E^*$  étant de dimension 4, il nous suffit, pour démontrer que la famille  $(f_0, f_1, f_2, f_3)$  est une base, d'établir qu'elle est libre.

Soit  $a_0, a_1, a_2$  et  $a_3$  quatre réels tels que :  $a_0 f_0 + a_1 f_1 + a_2 f_2 + a_3 f_3 = 0^*$  (où  $0^*$  désigne la forme linéaire nulle). On a alors les équivalences :

$$\begin{aligned} a_0 f_0 + a_1 f_1 + a_2 f_2 + a_3 f_3 &= 0^* \\ \Leftrightarrow \forall P \in \mathbb{R}[X], (a_0 f_0 + a_1 f_1 + a_2 f_2 + a_3 f_3)(P) &= 0 \\ \Leftrightarrow \forall P \in \mathbb{R}[X], a_0 f_0(P) + a_1 f_1(P) + a_2 f_2(P) + a_3 f_3(P) &= 0 \end{aligned}$$

Posons  $P(X) = \alpha + \beta X + \gamma X^2 + \delta X^3$ .

Remarquons que l'intégrale sur l'intervalle  $[-1;1]$  :

- d'une fonction qui y est définie et impaire est nulle.
- D'une fonction qui y est définie et paire est égale à 2 fois son intégrale sur l'intervalle  $[0;1]$ .

On a alors :

$$\begin{aligned}f_0(\mathbf{P}) &= \int_{-1}^1 \mathbf{P}(t) dt \\&= \int_{-1}^1 (\alpha + \beta t + \gamma t^2 + \delta t^3) dt \\&= \int_{-1}^1 (\alpha + \gamma t^2) dt = 2 \int_0^1 (\alpha + \gamma t^2) dt = 2 \left[ \alpha t + \frac{\gamma}{3} t^3 \right]_0^1 \\&= 2 \left( \alpha + \frac{\gamma}{3} \right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f_1(\mathbf{P}) &= \int_{-1}^1 t \mathbf{P}(t) dt \\&= \int_{-1}^1 (\alpha t + \beta t^2 + \gamma t^3 + \delta t^4) dt \\&= \int_{-1}^1 (\beta t^2 + \delta t^4) dt = 2 \int_0^1 (\beta t^2 + \delta t^4) dt = 2 \left[ \frac{\beta}{3} t + \frac{\delta}{5} t^5 \right]_0^1 \\&= 2 \left( \frac{\beta}{3} + \frac{\delta}{5} \right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f_2(\mathbf{P}) &= \int_{-1}^1 t^2 \mathbf{P}(t) dt \\&= \int_{-1}^1 (\alpha t^2 + \beta t^3 + \gamma t^4 + \delta t^5) dt \\&= \int_{-1}^1 (\alpha t^2 + \gamma t^4) dt = 2 \int_0^1 (\alpha t^2 + \gamma t^4) dt = 2 \left[ \frac{\alpha}{3} t + \frac{\gamma}{5} t^5 \right]_0^1 \\&= 2 \left( \frac{\alpha}{3} + \frac{\gamma}{5} \right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f_3(\mathbf{P}) &= \int_{-1}^1 t^3 \mathbf{P}(t) dt \\&= \int_{-1}^1 (\alpha t^3 + \beta t^4 + \gamma t^5 + \delta t^6) dt \\&= \int_{-1}^1 (\beta t^4 + \delta t^6) dt = 2 \int_0^1 (\beta t^4 + \delta t^6) dt = 2 \left[ \frac{\beta}{5} t + \frac{\delta}{7} t^7 \right]_0^1 \\&= 2 \left( \frac{\beta}{5} + \frac{\delta}{7} \right)\end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned}
 & a_0 f_0 + a_1 f_1 + a_2 f_2 + a_3 f_3 = 0^* \\
 \Leftrightarrow & \forall P \in \mathbb{R}[X], a_0 f_0(P) + a_1 f_1(P) + a_2 f_2(P) + a_3 f_3(P) = 0 \\
 \Leftrightarrow & \forall P \in \mathbb{R}[X], 2\left(\alpha + \frac{\gamma}{3}\right)a_0 + 2\left(\frac{\beta}{3} + \frac{\delta}{5}\right)a_1 + 2\left(\frac{\alpha}{3} + \frac{\gamma}{5}\right)a_2 + 2\left(\frac{\beta}{5} + \frac{\delta}{7}\right)a_3 = 0 \\
 \Leftrightarrow & \forall P \in \mathbb{R}[X], \left(a_0 + \frac{a_2}{3}\right)\alpha + \left(\frac{a_1}{3} + \frac{a_3}{5}\right)\beta + \left(\frac{a_0}{3} + \frac{a_2}{5}\right)\gamma + \left(\frac{a_1}{5} + \frac{a_3}{7}\right)\delta = 0 \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} a_0 + \frac{a_2}{3} = 0 \\ \frac{a_1}{3} + \frac{a_3}{5} = 0 \\ \frac{a_0}{3} + \frac{a_2}{5} = 0 \\ \frac{a_1}{5} + \frac{a_3}{7} = 0 \end{cases} \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} 3a_0 + a_2 = 0 & (1) \\ 5a_0 + 3a_2 = 0 & (2) \\ 5a_1 + 3a_3 = 0 & (3) \\ 7a_1 + 5a_3 = 0 & (4) \end{cases}
 \end{aligned}$$

Les équations (1) et (2), d'une part, (3) et (4), d'autre part, correspondent à des systèmes de Cramer de déterminant non nul (ils valent tous deux 4).

On en déduit immédiatement :  $a_0 = a_1 = a_2 = a_3 = 0$ . La famille  $(f_0, f_1, f_2, f_3)$  est donc une famille libre de  $E^*$ . C'est une base de cet espace.

La famille  $(f_0, f_1, f_2, f_3)$  est une base de  $E^*$ .

### Question 2.

Dans cette question, nous cherchons un quadruplet  $(P_0, P_1, P_2, P_3)$  de polynômes de  $E$  tels que pour tout entiers  $i$  et  $j$  dans  $\{0; 1; 2; 3\}$  on ait :  $f_i(P_j) = \delta_{ij}$ .

Posons  $P_0(X) = a_0 + b_0X + c_0X^2 + d_0X^3$ .

D'après la question précédente, on a immédiatement :

$$f_0(P_0) = 2\left(a_0 + \frac{c_0}{3}\right), f_1(P_0) = 2\left(\frac{b_0}{3} + \frac{d_0}{5}\right), f_2(P_0) = 2\left(\frac{a_0}{3} + \frac{c_0}{5}\right) \text{ et } f_3(P_0) = 2\left(\frac{b_0}{5} + \frac{d_0}{7}\right)$$

On a alors :

$$\forall i \in \{0; 1; 2; 3\}, f_i(P_0) = \delta_{i0} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\left(a_0 + \frac{c_0}{3}\right) = 1 & (1) \\ 2\left(\frac{b_0}{3} + \frac{d_0}{5}\right) = 0 & (2) \\ 2\left(\frac{a_0}{3} + \frac{c_0}{5}\right) = 0 & (3) \\ 2\left(\frac{b_0}{5} + \frac{d_0}{7}\right) = 0 & (4) \end{cases}$$

Les équations (2) et (4) donnent immédiatement :  $b_0 = d_0 = 0$ .

Les équations (1) et (3) donnent le système :

$$\begin{cases} 6a_0 + 2c_0 = 3 \\ 5a_0 + 3c_0 = 0 \end{cases}$$

Le déterminant associé  $d$  vaut :  $d = \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 6 \times 3 - 2 \times 5 = 18 - 10 = 8$ . Il vient alors :

$$a_0 = \frac{1}{8} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = \frac{3 \times 3 - 2 \times 0}{8} = \frac{9}{8} \quad \text{et} \quad c_0 = \frac{1}{8} \begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = \frac{6 \times 0 - 3 \times 5}{8} = -\frac{15}{8}$$

Finalement :

$$P_0(X) = \frac{9}{8} - \frac{15}{8}X^2 = \frac{3}{8}(3 - 5X^2)$$

En procédant de façon similaire, on obtient :

$$\begin{aligned} P_1(X) &= \frac{75}{8}X - \frac{105}{8}X^3 = \frac{15}{8}X(5 - 7X^2) \\ P_2(X) &= -\frac{15}{8} + \frac{45}{8}X = \frac{15}{8}(-1 + 3X) \\ P_3(X) &= -\frac{105}{8}X + \frac{175}{8}X^3 = \frac{35}{8}X(-3 + 5X^2) \end{aligned}$$

---

## Résultat final

La base antéduale de  $(f_0, f_1, f_2, f_3)$  est la base  $(P_0, P_1, P_2, P_3)$  définie par :

$$P_0(X) = \frac{9}{8} - \frac{15}{8}X^2 = \frac{3}{8}(3 - 5X^2)$$

$$P_1(X) = \frac{75}{8}X - \frac{105}{8}X^3 = \frac{15}{8}X(5 - 7X^2)$$

$$P_2(X) = -\frac{15}{8} + \frac{45}{8}X = \frac{15}{8}(-1 + 3X)$$

$$P_3(X) = -\frac{105}{8}X + \frac{175}{8}X^3 = \frac{35}{8}X(-3 + 5X^2)$$