Résoudre :

$$\begin{cases} x - my + m^2 z = m \\ mx - m^2 y + mz = 1 \\ mx + y - m^3 z = -1 \end{cases} \qquad (S)$$

où m est un paramètre réel.

Analyse

La seconde équation nous pousse immédiatement à étudier une certaine valeur de m. Ensuite, la première équation nous donne immédiatement le pivot nous permettant d'amorcer la résolution. Une discussion sur le paramètre m suit naturellement.

Résolution

Les coefficients de la seconde équation « suggèrent » d'envisager le cas : $m = 0$.
Dans ce cas, la deuxième équation se récrit : $0 = 1$ et le système (S) n'admet pas de solution.

Supposons désormais : $m \neq 0$.
La première équation suggère d'utiliser « x » comme pivot.

On a alors, en retranchant à la seconde et à la troisième équations m fois la première :

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} \left(m - m^3\right) z = 1 - m^2 \\ \left(1 + m^2\right) y - 2m^3 z = -1 - m^2 \\ x - my + m^2 z = m \end{cases}$$

Les deux premières équations conduisent alors à la discussion suivante :

1[er] cas : $1 - m^2 = 0$, c'est-à-dire $m^2 = 1$, soit encore $m \in \{-1 ; 1\}$.

- Si $m = 1$, on a :

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} 2y - 2z = -2 \\ x - y + z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y - z = -1 \\ x - y + z = 1 \end{cases}$$

En additionnant les égalités membre à membre, on obtient $x=0$.
Il vient alors : $y-z=-1$.
L'ensemble des solutions est alors l'ensemble des triplets de la forme : $\left(0\,;\,y\,;\,y+1\right)$.

- Si $m=-1$, on a :

$$(S)\Leftrightarrow\begin{cases} 2y+2z=-2 \\ x+y+z=-1 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} y+z=-1 \\ x+y+z=-1 \end{cases}$$

En soustrayant les deux égalité membre à membre, on obtient encore : $x=0$.
Il vient cette fois : $y+z=-1$.
L'ensemble des solutions est alors l'ensemble des triplets de la forme : $\left(0\,;\,y\,;-y-1\right)$.

2[ème] cas : $m\notin\{-1;1\}$
Dans ce cas, on a :

$$(S)\Leftrightarrow\begin{cases} \left(m-m^3\right)z=1-m^2 \\ \left(1+m^2\right)y-2m^3z=-1-m^2 \\ x-my+m^2z=m \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} m\left(1-m^2\right)z=1-m^2 \\ \left(1+m^2\right)y-2m^3z=-1-m^2 \\ x-my+m^2z=m \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} z=\dfrac{1}{m} \\ \left(1+m^2\right)y-2m^3z=-1-m^2 \\ x-my+m^2z=m \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} z=\dfrac{1}{m} \\ \left(1+m^2\right)y-2m^2=-1-m^2 \\ x-my+m=m \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} z=\dfrac{1}{m} \\ \left(1+m^2\right)y=m^2-1 \\ x-my=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} z=\dfrac{1}{m} \\ y=\dfrac{m^2-1}{m^2+1} \\ x=my \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x=\dfrac{m\left(m^2-1\right)}{m^2+1} \\ y=\dfrac{m^2-1}{m^2+1} \\ z=\dfrac{1}{m} \end{cases}$$

Dans ce cas, le système admet pour unique solution le triplet : $\left(\dfrac{m\left(m^2-1\right)}{m^2+1}\,;\dfrac{m^2-1}{m^2+1}\,;\dfrac{1}{m}\right)$.

Résultat final

Soit $\mathscr{S}$ l'ensemble des solutions du système (S) :

$$\begin{cases} x - my + m^2 z = m \\ mx - m^2 y + mz = 1 \\ mx + y - m^3 z = -1 \end{cases}$$

- Si $m = 0$, $\mathscr{S} = \varnothing$.
- Si $m = 1$, $\mathscr{S} = \{(0\,;\,y\,;\,y+1) \,/\, y \in \mathbb{R}\}$.
- Si $m = -1$, $\mathscr{S} = \{(0\,;\,y\,;\,-y-1) \,/\, y \in \mathbb{R}\}$.
- Si $m \notin \{-1\,;\,0\,;\,1\}$, $\mathscr{S} = \left\{\left(\dfrac{m(m^2-1)}{m^2+1}\,;\,\dfrac{m^2-1}{m^2+1}\,;\,\dfrac{1}{m}\right)\right\}$