

Résoudre :

$$\begin{cases} x.\cos(2\alpha) + y.\cos\alpha + z = a \\ x.\cos(2\beta) + y.\cos\beta + z = b \\ x.\cos(2\gamma) + y.\cos\gamma + z = c \end{cases} \quad (S)$$

Analyse

On étudie la matrice associée au système. Une relation trigonométrique simple permet d'en ramener le déterminant à un déterminant classique dont la nullité est facile à étudier.

Résolution

La matrice A associée au système s'écrit :

$$A = \begin{pmatrix} \cos(2\alpha) & \cos\alpha & 1 \\ \cos(2\beta) & \cos\beta & 1 \\ \cos(2\gamma) & \cos\gamma & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cos^2\alpha - 1 & \cos\alpha & 1 \\ 2\cos^2\beta - 1 & \cos\beta & 1 \\ 2\cos^2\gamma - 1 & \cos\gamma & 1 \end{pmatrix}$$

D'où :

$$\begin{aligned} \det A &= \begin{vmatrix} 2\cos^2\alpha - 1 & \cos\alpha & 1 \\ 2\cos^2\beta - 1 & \cos\beta & 1 \\ 2\cos^2\gamma - 1 & \cos\gamma & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2\cos^2\alpha & \cos\alpha & 1 \\ 2\cos^2\beta & \cos\beta & 1 \\ 2\cos^2\gamma & \cos\gamma & 1 \end{vmatrix} \\ &= 2 \begin{vmatrix} \cos^2\alpha & \cos\alpha & 1 \\ \cos^2\beta & \cos\beta & 1 \\ \cos^2\gamma & \cos\gamma & 1 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 1 & \cos\alpha & \cos^2\alpha \\ 1 & \cos\beta & \cos^2\beta \\ 1 & \cos\gamma & \cos^2\gamma \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Dans ce dernier déterminant, on reconnaît un déterminant de Vandermonde et on a immédiatement :

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos\alpha & \cos^2\alpha \\ 1 & \cos\beta & \cos^2\beta \\ 1 & \cos\gamma & \cos^2\gamma \end{vmatrix} = (\cos\gamma - \cos\beta)(\cos\gamma - \cos\alpha)(\cos\beta - \cos\alpha)$$

D'où, finalement :

$$\det A = -2 \begin{vmatrix} 1 & \cos \alpha & \cos^2 \alpha \\ 1 & \cos \beta & \cos^2 \beta \\ 1 & \cos \gamma & \cos^2 \gamma \end{vmatrix} = -2(\cos \gamma - \cos \beta)(\cos \gamma - \cos \alpha)(\cos \beta - \cos \alpha)$$

On va donc distinguer deux cas principaux.

1^{er} cas : $\cos \gamma \neq \cos \beta$ et $\cos \gamma \neq \cos \alpha$ et $\cos \beta \neq \cos \alpha$.

Dans ce cas, on a $\det A \neq 0$. Le système est un système de Cramer et il admet donc une solution unique :

$$x = \frac{\begin{vmatrix} a & \cos \alpha & 1 \\ b & \cos \beta & 1 \\ c & \cos \gamma & 1 \end{vmatrix}}{\det A}$$

$$= \frac{a(\cos \beta - \cos \gamma) - b(\cos \alpha - \cos \gamma) + c(\cos \alpha - \cos \beta)}{-2(\cos \gamma - \cos \beta)(\cos \gamma - \cos \alpha)(\cos \beta - \cos \alpha)}$$

$$= \frac{1}{2} \frac{(\cos \gamma - \cos \beta)a - (\cos \gamma - \cos \alpha)b + (\cos \beta - \cos \alpha)c}{(\cos \gamma - \cos \beta)(\cos \gamma - \cos \alpha)(\cos \beta - \cos \alpha)}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} \cos(2\alpha) & a & 1 \\ \cos(2\beta) & b & 1 \\ \cos(2\gamma) & c & 1 \end{vmatrix}}{\det A}$$

$$= \frac{\cos(2\alpha)(b-c) - \cos(2\beta)(a-c) + \cos(2\gamma)(a-b)}{-2(\cos \gamma - \cos \beta)(\cos \gamma - \cos \alpha)(\cos \beta - \cos \alpha)}$$

$$= \frac{1}{2} \frac{-[\cos(2\gamma) - \cos(2\beta)]a + [\cos(2\gamma) - \cos(2\alpha)]b - [\cos(2\beta) - \cos(2\alpha)]c}{(\cos \gamma - \cos \beta)(\cos \gamma - \cos \alpha)(\cos \beta - \cos \alpha)}$$

$$= \frac{1}{2} \frac{-2(\cos^2 \gamma - \cos^2 \beta)a + 2(\cos^2 \gamma - \cos^2 \alpha)b - 2(\cos^2 \beta - \cos^2 \alpha)c}{(\cos \gamma - \cos \beta)(\cos \gamma - \cos \alpha)(\cos \beta - \cos \alpha)}$$

$$= \frac{1}{2} \frac{1}{(\cos \gamma - \cos \beta)(\cos \gamma - \cos \alpha)(\cos \beta - \cos \alpha)} \left[-2(\cos \gamma + \cos \beta)(\cos \gamma - \cos \beta)a \right. \\ \left. + 2(\cos \gamma + \cos \alpha)(\cos \gamma - \cos \alpha)b - 2(\cos \beta + \cos \alpha)(\cos \beta - \cos \alpha)c \right]$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} \cos(2\alpha) & \cos \alpha & a \\ \cos(2\beta) & \cos \beta & b \\ \cos(2\gamma) & \cos \gamma & c \end{vmatrix}}{\det A}$$

$$= \frac{1}{-2(\cos \gamma - \cos \beta)(\cos \gamma - \cos \alpha)(\cos \beta - \cos \alpha)} \left[\cos(2\alpha)(\cos \beta c - \cos \gamma b) - \cos(2\beta)(\cos \alpha c - \cos \gamma a) + \cos(2\gamma)(\cos \alpha b - \cos \beta a) \right]$$

$$= -\frac{1}{2(\cos \gamma - \cos \beta)(\cos \gamma - \cos \alpha)(\cos \beta - \cos \alpha)} \left\{ a \left[\cos(2\beta)\cos \gamma - \cos(2\gamma)\cos \beta \right] + b \left[-\cos(2\alpha)\cos \gamma + \cos(2\gamma)\cos \alpha \right] + c \left[\cos(2\alpha)\cos \beta - \cos(2\beta)\cos \alpha \right] \right\}$$

On a :

$$\begin{aligned} \cos(2\beta)\cos \gamma - \cos(2\gamma)\cos \beta &= (2\cos^2 \beta - 1)\cos \gamma - (2\cos^2 \gamma - 1)\cos \beta \\ &= 2\cos \beta \cos \gamma (\cos \beta - \cos \gamma) + (\cos \beta - \cos \gamma) \\ &= (2\cos \beta \cos \gamma + 1)(\cos \beta - \cos \gamma) \end{aligned}$$

On en déduit, de façon similaire :

$$\begin{aligned} -\cos(2\alpha)\cos \gamma + \cos(2\gamma)\cos \alpha &= (2\cos \gamma \cos \alpha + 1)(\cos \gamma - \cos \alpha) \\ \cos(2\alpha)\cos \beta - \cos(2\beta)\cos \alpha &= (2\cos \alpha \cos \beta + 1)(\cos \alpha - \cos \beta) \end{aligned}$$

Finalement :

$$\begin{aligned} z &= -\frac{1}{2(\cos \gamma - \cos \beta)(\cos \gamma - \cos \alpha)(\cos \beta - \cos \alpha)} \left\{ (2\cos \beta \cos \gamma + 1)(\cos \beta - \cos \gamma)a \right. \\ &\quad \left. + (2\cos \gamma \cos \alpha + 1)(\cos \gamma - \cos \alpha)b + (2\cos \alpha \cos \beta + 1)(\cos \alpha - \cos \beta)c \right\} \\ &= \frac{1}{2(\cos \gamma - \cos \beta)(\cos \gamma - \cos \alpha)(\cos \beta - \cos \alpha)} \left[(2\cos \gamma \cos \beta + 1)(\cos \gamma - \cos \beta)a \right. \\ &\quad \left. - (2\cos \gamma \cos \alpha + 1)(\cos \gamma - \cos \alpha)b + (2\cos \beta \cos \alpha + 1)(\cos \beta - \cos \alpha)c \right] \end{aligned}$$

$x = \frac{1}{2} \frac{(\cos \gamma - \cos \beta)a - (\cos \gamma - \cos \alpha)b + (\cos \beta - \cos \alpha)c}{(\cos \gamma - \cos \beta)(\cos \gamma - \cos \alpha)(\cos \beta - \cos \alpha)}$ $y = \frac{1}{2} \frac{1}{(\cos \gamma - \cos \beta)(\cos \gamma - \cos \alpha)(\cos \beta - \cos \alpha)} \left[-2(\cos \gamma + \cos \beta)(\cos \gamma - \cos \beta)a \right. \\ \left. + 2(\cos \gamma + \cos \alpha)(\cos \gamma - \cos \alpha)b - 2(\cos \beta + \cos \alpha)(\cos \beta - \cos \alpha)c \right]$ $z = \frac{1}{2} \frac{1}{(\cos \gamma - \cos \beta)(\cos \gamma - \cos \alpha)(\cos \beta - \cos \alpha)} \left[(2\cos \gamma \cos \beta + 1)(\cos \gamma - \cos \beta)a \right. \\ \left. - (2\cos \gamma \cos \alpha + 1)(\cos \gamma - \cos \alpha)b + (2\cos \beta \cos \alpha + 1)(\cos \beta - \cos \alpha)c \right]$

$$\boxed{2^{\text{ème}} : \cos \gamma = \cos \beta \text{ ou } \cos \gamma = \cos \alpha \text{ ou } \cos \beta = \cos \alpha .}$$

Supposons qu'au moins l'une de ces égalités est vérifiée, par exemple : $\cos \gamma = \cos \beta$.

On a dans ce cas : $\cos(2\gamma) = 2\cos^2 \gamma - 1 = 2\cos^2 \beta - 1 = \cos(2\beta)$.

Le système se réécrit alors :

$$\begin{cases} x.\cos(2\alpha) + y.\cos \alpha + z = a \\ x.\cos(2\beta) + y.\cos \beta + z = b \\ x.\cos(2\beta) + y.\cos \beta + z = c \end{cases}$$

Deux situations sont alors envisageables :

- $b \neq c$: les équations du système sont incompatibles et il n'y a pas de solution.
- $b = c$: le système initial est équivalent au système :

$$\begin{cases} x.\cos(2\alpha) + y.\cos \alpha + z = a \\ x.\cos(2\beta) + y.\cos \beta + z = b \end{cases}$$

Comme les coefficients de « z » valent tous deux 1, on poursuit alors la discussion selon que $\cos \alpha$ est ou non égal à $\cos \beta$:

- Si $\cos \alpha \neq \cos \beta$: le système admet une infinité de solutions (géométriquement, il s'agit d'une droite, intersection de deux plans).
- Si $\cos \alpha = \cos \beta$:
 - Si $a = b$: le système est équivalent à l'équation $x.\cos(2\alpha) + y.\cos \alpha + z = a$.
 - Si $a \neq b$: les équations sont incompatibles et le système n'admet pas de solution.

En définitive, si au moins l'une des trois égalités $\cos \gamma = \cos \beta$, $\cos \gamma = \cos \alpha$ ou $\cos \beta = \cos \alpha$ est vérifiée, on a deux possibilités :

- Pour chacune des égalités, les seconds membres des équations correspondantes sont égaux : le système admet une infinité de solutions.
- Pour au moins une des égalités, les seconds membres des équations correspondantes ne sont pas égaux : le système n'admet pas de solution.

Résultat final

Si aucune des trois égalités $\cos \gamma = \cos \beta$, $\cos \gamma = \cos \alpha$ et $\cos \beta = \cos \alpha$ n'est vérifiée, alors le système (S) admet une unique solution (système de Cramer).

Si au moins l'une des trois égalités $\cos \gamma = \cos \beta$, $\cos \gamma = \cos \alpha$ ou $\cos \beta = \cos \alpha$ est vérifiée, on a deux possibilités :

- Pour chacune des égalités, les seconds membres des équations correspondantes sont égaux : le système admet une infinité de solutions.
- Pour au moins une des égalités, les seconds membres des équations correspondantes ne sont pas égaux : le système n'admet pas de solution.