Résoudre :

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = a \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = b \\ 7x_1 + 8x_2 + 9x_3 = c \end{cases} \qquad (S)$$

où a, b et c sont trois paramètres réels.

Analyse

La méthode du pivot de Gauss (cf. le coefficient de « x_1 » dans la première équation) nous permet d'obtenir facilement la discussion sur a, b et c.

Résolution

On a :

$$(S) \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = a & (L_1) \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = b & (L_2) \\ 7x_1 + 8x_2 + 9x_3 = c & (L_3) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = a & (L_1) \leftarrow (L_1) \\ \quad - 3x_2 - 6x_3 = b - 4a & (L_2) \leftarrow (L_2) - 4(L_1) \\ \quad - 6x_2 - 12x_3 = c - 7a & (L_3) \leftarrow (L_3) - 7(L_1) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = a & (L_1) \leftarrow (L_1) \\ x_2 + 2x_3 = \dfrac{b-4a}{-3} & (L_2) \leftarrow \dfrac{1}{-3}(L_2) \\ x_2 + 2x_3 = \dfrac{c-7a}{-6} & (L_3) \leftarrow \dfrac{1}{-6}(L_1) \end{cases}$$

On a :

$$\frac{b-4a}{-3} = \frac{c-7a}{-6} \Leftrightarrow 2(b-4a) = c - 7a \Leftrightarrow a - 2b + c = 0$$

On doit donc distinguer deux cas.

$\boxed{1^{\text{er}} \text{ cas : } a-2b+c\neq 0}$

On a donc $\dfrac{b-4a}{-3}\neq\dfrac{c-7a}{-6}$ et les deux dernières équations du système sont incompatibles.
L'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions du système (S) est donc vide.

$\boxed{1^{\text{er}} \text{ cas : } a-2b+c=0}$

On a dans ce cas :

$$(S)\Leftrightarrow\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = a \\ x_2 + 2x_3 = \dfrac{b-4a}{-3} \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} 2x_2 + 3x_3 = -x_1 + a \\ x_2 + 2x_3 = \dfrac{b-4a}{-3} \end{cases}$$

La résolution de ce système ne pose pas de difficultés particulières et on obtient facilement :

$$\begin{cases} x_2 = -2x_1 - 2a + b \\ x_3 = x_1 + \dfrac{5a-2b}{3} \end{cases}$$

En définitive, on obtient une infinité de triplets solutions du système (S) :

$$\mathscr{S}=\left\{\left(x_1\,;-2x_1-2a+b\,;\,x_1+\frac{5a-2b}{3}\right)/\,x_1\in\mathbb{R}\right\}$$

Résultat final

Soit $\mathscr{S}$ l'ensemble des solutions du système (S) :

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = a \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = b \\ 7x_1 + 8x_2 + 9x_3 = c \end{cases}$$

- Si $a-2b+c\neq 0$, $\mathscr{S}=\varnothing$.
- Si $a-2b+c=0$, $\mathscr{S}=\left\{\left(x_1\,;-2x_1-2a+b\,;\,x_1+\dfrac{5a-2b}{3}\right)/\,x_1\in\mathbb{R}\right\}$.