Résoudre dans $\mathbb{R}$ en discutant suivant la valeur du paramètre réel *m* :

$$\begin{cases} x + y + (1-m)z = m+2 \\ (1+m)x - y + 2z = 0 \\ 2x - my + 3z = m+2 \end{cases} \quad (S)$$

Analyse

La méthode du pivot de Gauss (cf. le coefficient de « *x* » dans la première équation) nous permet d'obtenir facilement la discussion sur *m*.

Résolution

On a :

$$(S) \quad \begin{cases} x + y + (1-m)z = m+2 & (L_1) \\ (1+m)x - y + 2z = 0 & (L_2) \\ 2x - my + 3z = m+2 & (L_3) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + (1-m)z = m+2 & (L_1) \leftarrow (L_1) \\ -(2+m)y + (1+m^2)z = -(m+2)(1+m) & (L_2) \leftarrow (L_2) - (1+m)(L_1) \\ -(2+m)y + (1+2m)z = -(m+2) & (L_3) \leftarrow (L_3) - 2(L_1) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + (1-m)z = m+2 & (L_1) \leftarrow (L_1) \\ -(2+m)y + (1+m^2)z = -(m+2)(1+m) & (L_2) \leftarrow (L_2) \\ -m(m-2)z = m(m+2) & (L_3) \leftarrow (L_3) - (L_1) \end{cases}$$

Le coefficient de « *z* » dans la dernière équation permet de mener la discussion :

$\boxed{1^{\text{er}} \text{ cas : } m = 0}$

On a alors :

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 2 \\ -2y + z = -2 \\ 0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -y - z + 2 \\ z = 2y - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3y + 4 \\ z = 2y - 2 \end{cases}$$

Dans ce cas, le système admet une infinité de solutions :

$$\mathscr{S}=\left\{\left(-3y+4\,;\,y\,;\,2y-2\right)/\,y\in\mathbb{R}\right\}$$

$\boxed{2^{\text{ème}}\text{ cas : } m=2}$

On a alors :

$$(S)\Leftrightarrow\begin{cases}x+y-z=4\\ -4y+5z=-12\\ 0=8\end{cases}$$

La dernière équation n'admet bien sûr pas de solution.

$$\mathscr{S}=\varnothing$$

$\boxed{3^{\text{ème}}\text{ cas : } m\notin\{0\,;\,2\}}$

On a alors :

$$(S)\Leftrightarrow\begin{cases}x+y+(1-m)z=m+2\\ -(2+m)y+\left(1+m^2\right)z=-(m+2)(1+m)\\ -m(m-2)z=m(m+2)\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=-y-(1-m)z+m+2\\ y=\dfrac{1+m^2}{m+2}z+1+m\\ z=-\dfrac{m+2}{m-2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-y-(1-m)z+m+2\\ y=-\dfrac{1+m^2}{m+2}\times\dfrac{m+2}{m-2}+1+m\\ z=-\dfrac{m+2}{m-2}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=-\left(-\dfrac{m+3}{m+2}\right)-(1-m)\times\left(-\dfrac{m+2}{m-2}\right)+m+2\\ y=-\dfrac{m+3}{m-2}\\ z=-\dfrac{m+2}{m-2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{1}{m-2}\\ y=-\dfrac{m+3}{m-2}\\ z=-\dfrac{m+2}{m-2}\end{cases}$$

Le système admet dans ce cas une unique solution :

$$\mathscr{S}=\left\{\left(\frac{1}{m-2}\,;-\frac{m+3}{m-2}\,;-\frac{m+2}{m-2}\right)\right\}$$

Résultat final

Soit $\mathscr{S}$ l'ensemble des solutions du système (S) :

$$\begin{cases} x & + & y & + & (1-m)z & = & m+2 \\ (1+m)x & - & y & + & 2z & = & 0 \\ 2x & - & my & + & 3z & = & m+2 \end{cases}$$

- Si $m=2$, $\mathscr{S}=\varnothing$.
- Si $m=0$, $\mathscr{S}=\left\{\left(-3y+4\,;\,y\,;\,2y-2\right)/\,y\in\mathbb{R}\right\}$
- Si $m\notin\{0\,;\,2\}$, $\mathscr{S}=\left\{\left(\dfrac{1}{m-2}\,;-\dfrac{m+3}{m-2}\,;-\dfrac{m+2}{m-2}\right)\right\}$.