1. Montrer que les nombres 222 et 115 sont premiers entre eux :
   En les décomposant en facteurs premier.
   En utilisant l'algorithme d'Euclide.

2. Déterminer les deux entiers relatifs a et b tels que :
$$222a+115b=1$$

Analyse

Il s'agit ici d'un exercice d'application directe du cours.
Les décompositions en facteurs premiers ne posent pas de problème particulier.
La deuxième question a pour objectif de vous entraîner à utiliser l'algorithme d'Euclide afin de pouvoir résoudre dans $\mathbb{Z}$ des équations du type $ux+vy=1$ où u et v sont deux entiers premiers entre eux.

Résolution

Question 1.

On obtient aisément les décompositions suivantes en facteurs premiers :

$$222=1\times 2\times 111=1\times 2\times 3\times 37$$
et
$$115=1\times 5\times 23.$$

Les nombres 222 et 115 admettent 1 comme seul diviseur commun ; ils sont donc premiers entre eux.

Utilisons maintenant l'algorithme d'Euclide :

$$\begin{aligned} 222 &= 115+107 \\ 115 &= 107+8 \\ 107 &= 13\times 8+3 \\ 8 &= 2\times 3+2 \\ 3 &= 2+\boxed{1} \end{aligned}$$

Le reste finalement obtenu vaut 1. On en déduit que $\text{PGCD}(222,115)=1$, c'est à dire que 222 et 115 sont premiers entre eux.

Question 2.

Nous allons utiliser l'algorithme d'Euclide pour déterminer les deux nombres *a* et *b*.

Nous reprenons ce qui a été fait plus haut (divisions euclidiennes successives) en numérotant les lignes :

$$\begin{array}{ll} 222 = 115 + 107 & L_1 \\ 115 = 107 + 8 & L_2 \\ 107 = 13 \times 8 + 3 & L_3 \\ 8 = 2 \times 3 + 2 & L_4 \\ 3 = 2 + \boxed{1} & L_5 \end{array}$$

Pour éliminer l'avant-dernier reste (le « 2 » apparaissant dans l'avant-dernière ligne), nous allons multiplier l'avant dernière ligne (L_4) par -1 puisque 2 apparaît dans la dernière ligne dans le membre de droite de l'égalité. On obtient :

$$\begin{array}{ll} 222 = 115 + 107 & L_1 \\ 115 = 107 + 8 & L_2 \\ 107 = 13 \times 8 + 3 & L_3 \\ -8 = -(2 \times 3) - 2 & L_4^{'} = -L_4 \\ 3 = 2 + \boxed{1} & L_5 \end{array}$$

Pour éliminer le reste (qui vaut 3) de la ligne (L_3), nous allons multiplier cette ligne par 3. On obtient :

$$\begin{array}{ll} 222 = 115 + 107 & L_1 \\ 115 = 107 + 8 & L_2 \\ 3 \times 107 = 39 \times 8 + 3 \times 3 & L_3^{'} = 3 \times L_3 \\ -8 = -2 \times 3 - 2 & L_4^{'} = -L_4 \\ 3 = 2 + \boxed{1} & L_5 \end{array}$$

Pour éliminer le reste (qui vaut 8) de la ligne (L_2), nous allons multiplier cette ligne par -40.
On obtient :

$$\begin{array}{ll} 222 = 115 + 107 & L_1 \\ -40 \times 115 = -40 \times 107 - 40 \times 8 & L_2^{'} = -40 \times L_2 \\ 3 \times 107 = 39 \times 8 + 3 \times 3 & L_3^{'} = 3 \times L_3 \\ -8 = -(2 \times 3) - 2 & L_4^{'} = -L_4 \\ 3 = 2 + \boxed{1} & L_5 \end{array}$$

Enfin, pour éliminer le reste (qui vaut 107) de la ligne (L_1), nous allons multiplier cette ligne par 43. On obtient :

$$\begin{array}{ll} 43\times 222 = 43\times 115 + 43\times 107 & L_1^{'} = 43\times L_1 \\ -40\times 115 = -40\times 107 - 40\times 8 & L_2^{'} = -40\times L_2 \\ 3\times 107 = 39\times 8 + 3\times 3 & L_3^{'} = 3\times L_3 \\ -8 = -(2\times 3) - 2 & L_4^{'} = -L_4 \\ 3 = 2 + \boxed{1} & L_5 \end{array}$$

En additionnant membre à membre les égalités ainsi obtenues, il vient :

$$43\times 222 - 40\times 115 = 43\times 115 + 1$$

Soit :

$$\boxed{43\times 222 - 83\times 115 = 1}$$

Finalement :

$$a = 43$$
$$b = -83$$

Résultat final

Les nombres 222 et 115 sont premiers entre eux et on a :
$43\times 222 - 83\times 115 = 1$