Déterminer la plus grande puissance de 6 divisant $1000!$

Analyse

Un exercice probablement … déroutant dans sa forme (notamment au regard de l'énormité du nombre $1000!$ …). Pour autant, la piste de la décomposition en facteurs premiers n'est pas loin …

Résolution

Le nombre $1000!$ est divisible par 2 et 3. Sa décomposition en facteurs premiers est de la forme :

$$1000! = 2^{n(2)} \times 3^{n(3)} \times ...$$

Où $n(2)$ et $n(3)$ désignent respectivement les puissances de 2 et 3 de cette décomposition.

Dans ces conditions, la plus grande puissance de 6 divisant $1000!$ est : $6^{\min(n(2),n(3))}$.

Déterminons $n(3)$.

Pour ce faire, nous allons nous intéresser aux multiples de 3 inférieurs à 1000 en les classant suivant la puissance de 3 dont ils sont multiples.

La plus grande puissance de 3 inférieure à 1000 est $3^6 = 729$.
La « contribution » à $n(3)$ vaut donc : $\boxed{6}$.

Il vient ensuite : $3^5 = 243$.
Ses multiples inférieurs à 1000 et différents de 729 sont : $3^5 \times 1$, $3^5 \times 2 = 486$ et $3^5 \times 4 = 972$.
Il y en a 3 et leur contribution à $n(3)$ vaut donc : $5 \times 3 = \boxed{15}$.

Il vient ensuite : $3^4 = 81$.
Ses multiples inférieurs à 1000 et différents des nombres précédents (on multiplie 3^4 par un entier non multiple de 3) sont : $3^4 \times 1$, $3^4 \times 2 = 162$, $3^4 \times 4 = 324$, …, $3^4 \times 11 = 891$.
Il y en a $11 - 3 = 8$ et leur contribution à $n(3)$ vaut donc : $4 \times 8 = \boxed{32}$.

Il vient ensuite : $3^3 = 27$.
Ses multiples inférieurs à 1000 et différents des nombres précédents sont : $3^3 \times 1$, $3^3 \times 2 = 54$, $3^3 \times 4 = 108$, …, $3^3 \times 37 = 999$.

Il y en a $37-12=25$ et leur contribution à $n(3)$ vaut donc : $3\times 25=\boxed{75}$.

Il vient ensuite : $3^2=9$.
Ses multiples inférieurs à 1000 et différents des nombres précédents sont : $3^2\times 1$, $3^2\times 2=18$, $3^2\times 4=36$, …, $3^2\times 110=990$.
Il y en a $110-36=74$ et leur contribution à $n(3)$ vaut donc : $2\times 74=\boxed{148}$.

Il vient enfin : $3^1=3$.
Ses multiples inférieurs à 1000 et différents des nombres précédents sont : $3^1\times 1$, $3^1\times 2=6$, $3^1\times 4=12$, …, $3^2\times 332=996$.
Il y en a $332-110=222$ et leur contribution à $n(3)$ vaut donc : $1\times 222=\boxed{222}$.

Finalement, on a : $n(3)=6+15+32+75+148+222=498$.

Puisque $1000!$ comporte 500 facteurs pairs (de 2 à 1000), on peut écrire : $n(2)\geq 500$.
D'après le résultat précédent, on a : $\min\left(n(2),n(3)\right)=498$.

La plus grande puissance de 6 divisant $1000!$ est donc 6^{498}.

Résultat final

La plus grande puissance de 6 divisant $1000!$ est 6^{498}.