Résoudre dans $\mathbb{Z}^*$: $\text{ppcm}(x,y)=x+y-1$.

Analyse

La résolution ne présente pas de difficulté particulière et se fait en deux étapes après avoir introduit le PGCD des deux nombres *x* et *y*.

Résolution

Posons : $d=\text{pgcd}(x,y)$.

On peut alors écrire : $x=dx'$ et $y=dy'$ où x' et y' sont premiers entre eux.

On a alors : $m=\text{ppcm}(x,y)=dx'y'$ et l'équation se récrit :

$$dx'y'=dx'+dy'-1$$

On en tire alors :

$$d(x'+y'-x'y')=1$$

On en déduit immédiatement : $d=1$.
Il vient alors : $x'=x$, $y'=y$ et : $x'+y'-x'y'=x+y-xy=1$.

Cette dernière équation se récrit : $(x-1)(1-y)=0$ et on en conclut finalement : $x=1$ ou $y=1$.

Résultat final

L'équation $\text{ppcm}(x,y)=x+y-1$ dans $\mathbb{Z}^*$ admet comme ensemble solution :

$$\mathcal{S}=\left\{(x,y)\in\left(\mathbb{Z}^*\right)^2 / x=1 \text{ ou } y=1\right\}.$$