Résoudre dans $\mathbb{N}^*$:

$$\begin{cases} \text{pgcd}(x,y) = x - y \\ \text{ppcm}(x,y) = 300 \end{cases}$$

Analyse

On récrit classiquement x et y à l'aide de leur PGCD et la deuxième équation nous donne alors la base pour obtenir les solutions …

Résolution

Posons : $d = \text{pgcd}(x,y)$ et $m = \text{ppcm}(x,y)$.

On peut alors écrire : $x = dx'$ et $y = dy'$ où x' et y' sont premiers entre eux et la première équation se récrit :

$$d = dx' - dy'$$

Soit, en simplifiant par d :

$$x' - y' = 1$$

Les entiers x' et y' sont donc deux entiers consécutifs premiers entre eux (x' étant le plus grand).

Comme : $m = \text{ppcm}(x,y) = dx'y'$, la deuxième équation nous donne :

$$dx'y' = 300$$

On en déduit que x' et y' sont donc deux diviseurs de 300.

Finalement, on cherche x' et y', deux entiers consécutifs diviseurs de 300, x' étant le plus grand.

On a facilement la liste des diviseurs de 300 :

1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 25, 30, 50, 60, 75, 100, 150 et 300

D’où les possibilités :

$$x'=2 \text{ et } y'=1 \text{ qui donnent } d=150 \text{ et : } (x,y)=(300;150)$$
$$x'=3 \text{ et } y'=2 \text{ qui donnent } d=50 \text{ et : } (x,y)=(150;100)$$
$$x'=4 \text{ et } y'=3 \text{ qui donnent } d=25 \text{ et : } (x,y)=(100;75)$$
$$x'=5 \text{ et } y'=4 \text{ qui donnent } d=15 \text{ et : } (x,y)=(150;100)$$
$$x'=6 \text{ et } y'=5 \text{ qui donnent } d=10 \text{ et : } (x,y)=(60;50)$$

Résultat final

Le système $\begin{cases} \text{pgcd}(x,y)=x-y \\ \text{ppcm}(x,y)=300 \end{cases}$ admet comme ensemble solution :

$$\mathcal{S}=\{(60;50),(75;60),(100;75),(150;100),(300;150)\}.$$