Soit $a$ et $n$ deux entiers naturels non nuls et différents de 1. On suppose que $a^n - 1$ est premier.

1. Montrer que $a$ est égal à 2.
2. Montrer que $n$ est premier.
3. A-t-on la réciproque ?

## Analyse

Un exercice classique autour des nombres de Mersenne …

## Résolution

### *Question 1.*

On a classiquement :

$$a^n - 1 = (a-1)\left(a^{n-1} + a^{n-2} + a^{n-3} + \dots + a + 1\right)$$

$a^n - 1$ étant premier, cette factorisation entraîne $a - 1 = 1$, soit $a = 2$.

### *Question 2.*

Menons ici un raisonnement par l'absurde en supposant que $n$ n'est pas premier.

On peut donc, dans ces conditions, écrire : $n = pq$ avec $p \neq 1$ et $q \neq 1$.
Il vient alors :

$$a^n - 1 = a^{pq} - 1 = \left(a^p - 1\right)\left(a^{p(q-1)} + a^{p(q-2)} + \dots + a^p + 1\right)$$

C'est à dire : $a^n - 1$ non premier ($a = 2$ et $p \neq 1$ entraîne $a^p - 1 > 1$). Ce qui est absurde.

### *Question 3.*

Le nombre de Mersenne $M_{11}$ n'est pas premier : $M_{11} = 2^{11} - 1 = 2048 - 1 = 2047 = 23 \times 89$.
Il existe donc des nombres de la forme $2^n - 1$ avec $n$ premier qui ne sont pas premiers.

## Résultat final

Si on considère un nombre premier de la forme $a^n - 1$ alors nécessairement $a$ est égal à 2 et $n$ est premier.
La réciproque est fausse : il existe des nombres de la forme $2^n - 1$ avec $n$ premier qui ne sont pas premiers.