

Soit  $a$  et  $b$  deux entiers naturels non nuls premiers entre eux et tels que  $ab$  soit un carré parfait.

Montrer que  $a$  et  $b$  sont deux carrés parfaits.

---

## Analyse

Un exercice court. On part de la décomposition en facteurs premiers du produit  $ab$ .

---

## Résolution

Le produit  $ab$  étant un carré parfait, sa décomposition en facteurs premiers est de la forme :

$$ab = p_1^{2\alpha_1} \times p_2^{2\alpha_2} \times p_3^{2\alpha_3} \times \dots \times p_n^{2\alpha_n}$$

les  $p_i$  étant des entiers naturels non nuls et différents de 1, premiers et deux à deux distincts, les  $\alpha_i$  étant des entiers naturels non nuls.

Considérons le facteur premier  $p_1$  et supposons qu'il divise  $a$ . Comme  $a$  et  $b$  sont premiers entre eux,  $p_1$  ne divise pas  $b$  et on en déduit immédiatement que  $p_1^{2\alpha_1}$  divise  $a$ .

En raisonnant de la sorte pour chaque facteur  $p_i$ , on conclut que pour tout  $i$  de  $\llbracket 1 ; n \rrbracket$ , on a :

$$p_i^{2\alpha_i} \text{ divise } a \text{ ou } p_i^{2\alpha_i} \text{ divise } b.$$

Ainsi, quitte à réindexer les facteurs premiers ci-dessus, il existe un indice  $j$  tel que :

$$a = p_1^{2\alpha_1} \times p_2^{2\alpha_2} \times p_3^{2\alpha_3} \times \dots \times p_j^{2\alpha_j} \text{ et } b = p_{j+1}^{2\alpha_{j+1}} \times p_{j+2}^{2\alpha_{j+2}} \times \dots \times p_n^{2\alpha_n}$$

Les entiers  $a$  et  $b$  sont deux carrés parfaits.

---

## Résultat final

Si le produit de deux entiers naturels non nuls premiers entre eux est un carré parfait alors ces deux entiers sont eux-mêmes des carrés parfaits.