

Soit a et b deux entiers. On note $d = a \wedge b$ et $m = a \vee b$.

Déterminer $(a+b) \wedge m$.

Analyse

Un exercice assez court faisant appel à un résultat très classique : si deux entiers sont premiers entre eux alors leur somme et leur produit le sont également. Le théorème de Bezout est utilisé à maintes reprises ...

Résolution

On a : $a = d \times a'$ et $b = d \times b'$ avec $a' \wedge b' = 1$. D'où : $a + b = d \times a' + d \times b' = d \times (a' + b')$.

Par ailleurs : $m = d \times a' \times b'$.

On a donc : $(a+b) \wedge m = [d \times (a'+b')] \wedge [d \times a' \times b'] = d [(a'+b') \wedge (a' \times b')]$

Nous allons montrer le résultat (classique) : $(a'+b') \wedge (a' \times b') = 1$.

Les entiers a' et b' étant premiers entre eux, le théorème de Bezout nous permet d'affirmer qu'il existe deux entiers u et v tels que : $u \times a' + v \times b' = 1$.

On en déduit alors :

$$u \times a' + v \times (a'+b') - v \times a' = 1, \text{ soit : } (u-v) \times a' + v \times (a'+b') = 1 \quad (1)$$

Et, de façon analogue :

$$u \times (a'+b') - u \times b' + v \times b' = 1, \text{ soit : } u \times (a'+b') + (v-u) \times b' = 1 \quad (2)$$

Les égalités (1) et (2) et le théorème de Bezout nous permettent alors respectivement de conclure que :

- $a'+b'$ et a' sont premiers entre eux ;
- $a'+b'$ et b' sont premiers entre eux.

En multipliant membre à membre les égalités (1) et (2), il vient :

$$[(u-v) \times a' + v \times (a'+b')] [u \times (a'+b') + (v-u) \times b'] = 1 \times 1$$

Soit :

$$[(u-v) \times u \times a' + v \times u \times (a'+b') + v \times (v-u) \times b'] \times (a'+b') - (u-v)^2 \times a' \times b' = 1$$

Le théorème de Bezout (encore une fois !) nous permet donc de conclure que $a'+b'$ et $a' \times b'$ sont premiers entre eux (résultat classique à retenir ou savoir retrouver très vite).

Finalement :

$$(a+b) \wedge m = d = a \wedge b$$

Résultat final

Quels que soient les entiers a et b , on a :

$$\text{pgcd}(a+b, \text{ppcm}(a,b)) = \text{pgcd}(a,b)$$