

Résoudre :

$$n^2 \equiv -1 [4]$$

Analyse

Puisque nous devons raisonner modulo 4, il semble « naturel » de travailler dans l'ensemble $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$...

Résolution

Notons \dot{n}^2 , dans $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, la classe d'équivalence de l'entier n^2 . On a : $\dot{n}^2 = \left(\dot{n}\right)^2$.

Or, on a les équivalences :

$$n^2 \equiv -1 [4] \Leftrightarrow n^2 \equiv 3 [4] \Leftrightarrow \dot{n}^2 = \dot{3} \Leftrightarrow \left(\dot{n}\right)^2 = \dot{3}$$

Comme $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} = \{\dot{0}, \dot{1}, \dot{2}, \dot{3}\}$ on a les quatre calculs suivants :

$$\left(\dot{0}\right)^2 = \dot{0}^2 = \dot{0}$$

$$\left(\dot{1}\right)^2 = \dot{1}^2 = \dot{1}$$

$$\left(\dot{2}\right)^2 = \dot{2}^2 = \dot{4} = \dot{0}$$

$$\left(\dot{3}\right)^2 = \dot{3}^2 = \dot{9} = \dot{1}$$

On ne peut donc obtenir $\dot{3}$: l'équation n'admet pas de solution.

Résultat final

L'équation $n^2 \equiv -1 [4]$ n'admet pas de solution.