Soit a, b et c trois entiers.
Démontrer que l'on a :

$$7 \text{ divise } a^3+b^3+c^3 \Rightarrow 7 \text{ divise } abc$$

Analyse

Puisque nous devons raisonner modulo 7, il semble « naturel » de travailler dans l'ensemble $\mathbb{Z}_{/7\mathbb{Z}}$ …

Résolution

Notons $\dot{\widehat{a^3}}$, dans $\mathbb{Z}_{/7\mathbb{Z}}$, la classe d'équivalence de l'entier a^3. On a : $\dot{\widehat{a^3}} = \left(\dot{a}\right)^3$.

On procède de même avec les deux autres entiers b^3 et c^3.
On a alors les équivalences :

$$\begin{aligned}
\left(7 \text{ divise } a^3+b^3+c^3 \Rightarrow 7 \text{ divise } abc\right) &\Leftrightarrow \left(a^3+b^3+c^3 \equiv 0\,[7] \Rightarrow abc \equiv 0\,[7]\right) \\
&\Leftrightarrow \left(\dot{\overline{a^3+b^3+c^3}} = \dot{0} \Rightarrow \dot{\widehat{abc}} = \dot{0}\right) \\
&\Leftrightarrow \left(\dot{\widehat{a^3}}+\dot{\widehat{b^3}}+\dot{\widehat{c^3}} = \dot{0} \Rightarrow \dot{a}\,\dot{b}\,\dot{c} = \dot{0}\right) \\
&\Leftrightarrow \left(\left(\dot{a}\right)^3+\left(\dot{b}\right)^3+\left(\dot{c}\right)^3 = \dot{0} \Rightarrow \dot{a}\,\dot{b}\,\dot{c} = \dot{0}\right)
\end{aligned}$$

Comme $\mathbb{Z}_{/7\mathbb{Z}} = \left\{\dot{0}, \dot{1}, \dot{2}, \dot{3}, \dot{4}, \dot{5}, \dot{6}\right\}$ on a les sept calculs suivants :

$$\left(\dot{0}\right)^3 = \dot{\widehat{0^3}} = \dot{0} \qquad \left(\dot{1}\right)^3 = \dot{\widehat{1^3}} = \dot{1} \qquad \left(\dot{2}\right)^3 = \dot{\widehat{2^3}} = \dot{8} = \dot{1}$$

$$\left(\dot{3}\right)^3 = \dot{\widehat{3^3}} = \dot{27} = \dot{6} \qquad \left(\dot{4}\right)^3 = \dot{\widehat{4^3}} = \dot{64} = \dot{1}$$

$$\left(\dot{5}\right)^3 = \dot{\widehat{5^3}} = \dot{125} = \dot{6} \qquad \left(\dot{6}\right)^3 = \dot{\widehat{6^3}} = \dot{216} = \dot{6}$$

Supposons alors qu'aucun des trois entiers ne soit divisible par 7. Les valeurs possibles de la somme $\left(\dot{a}\right)^3+\left(\dot{b}\right)^3+\left(\dot{c}\right)^3$ seraient alors, d'après les calculs précédents :

$$\dot{1}+\dot{1}+\dot{1}=\dot{3}$$

$$\dot{1}+\dot{1}+\dot{6}=\dot{8}=\dot{1}$$

$$\dot{1}+\dot{6}+\dot{6}=\dot{13}=\dot{6}$$

$$\dot{6}+\dot{6}+\dot{6}=\dot{18}=\dot{4}$$

Ainsi, l'un des trois entiers *a*, *b* ou *c* est nécessairement divisible par 7 et il en va alors de même pour leur produit.

Remarquons que la somme $\left(\dot{a}\right)^3+\left(\dot{b}\right)^3+\left(\dot{c}\right)^3$ est nulle sans nécessairement que les trois entiers soient divisibles par 7. En effet, on a : $\dot{0}+\dot{1}+\dot{6}=\dot{7}=\dot{0}$. Ainsi, on peut par exemple considérer un entier divisible par 7, le second congru à 2 modulo 7 et le troisième congru à 5 modulo 7.

Par exemple : $a=35$, $b=-19$ et $c=33$ donnent :

$$a^3+b^3+c^3=35^3+\left(-19\right)^3+33^3=71\,953=7\times 10\,279$$

Résultat final

Si la somme des cubes de trois entiers est divisible par 7 alors leur produit l'est également.