Montrer que 13 divise $2^{70}+3^{70}$.

Analyse

On peut procéder de diverses façons. Nous proposons ci-dessous deux méthodes : la première consiste à factoriser la somme $2^{70}+3^{70}$; la seconde à utiliser le petit théorème de Fermat, 13 étant premier.

Résolution

1ère méthode : factorisation

On a :

$$\begin{aligned} 2^{70}+3^{70} &= 2^{2\times 35}+3^{2\times 35} \\ &= 4^{35}+9^{35} \\ &= 4^{35}-(-9)^{35} \end{aligned}$$

Or, on a classiquement : $a^n-b^n=(a-b)\left(a^{n-1}+ba^{n-2}+b^2a^{n-3}+\ldots+ab^{n-2}+b^{n-1}\right)$.
Ainsi, $a-b$ divise a^n-b^n.
Ici, avec $a=4$ et $b=-9$, on a : $a-b=4-(-9)=13$ divise $4^{35}-(-9)^{35}=2^{70}+3^{70}$.
Le résultat est établi.

2ème méthode : utilisation du petit théorème de Fermat

13 étant un nombre premier, on a, d'après le petit théorème de Fermat :

$$2^{13}\equiv 2 \bmod 13 \text{ et } 3^{13}\equiv 3 \bmod 13$$

$2^{13}\equiv 2 \bmod 13$ entraîne $\left(2^{13}\right)^5\equiv 2^5 \bmod 13$, soit : $2^{65}\equiv 2^5 \bmod 13$.
D'où : $2^{65}\times 2^5\equiv 2^5\times 2^5 \bmod 13$, soit : $2^{70}\equiv 2^{10} \bmod 13$.

De façon similaire, on a : $3^{70}\equiv 3^{10} \bmod 13$.

Donc : $2^{70}+3^{70}\equiv 2^{10}+3^{10} \bmod 13$.

Comme $2^{10} = 2^6 \times 2^4$ et comme $2^6 = 64 \equiv -1 \bmod 13$ et $2^4 = 16 \equiv 3 \bmod 13$, on a finalement : $2^{10} \equiv -3 \bmod 13$.

Par ailleurs : $3^3 = 27 \equiv 1 \bmod 13$, d'où : $\left(3^3\right)^3 = 3^9 \equiv 1 \bmod 13$ et enfin : $3^{10} \equiv 3 \bmod 13$.

Comme $2^{10} \equiv -3 \bmod 13$ et $3^{10} \equiv 3 \bmod 13$, on a immédiatement : $2^{10} + 3^{10} \equiv 0 \bmod 13$.

Finalement, $2^{10} + 3^{10}$ est divisible par 13. Comme $2^{70} + 3^{70} \equiv 2^{10} + 3^{10} \bmod 13$, il en va de même pour $2^{70} + 3^{70}$.

Résultat final

$2^{70} + 3^{70}$ est divisible par 13.