Résoudre dans $\mathbb{Z}$: $\text{pgcd}(x, y) = x + y - 1$.

Analyse

On commence par introduire le PGCD des entiers *x* et *y* et on montre facilement qu'il est égal à 1.

Résolution

Notons *d* le PGCD de *x* et *y*. On peut alors écrire $x = dx'$ et $y = dy'$ où x' et y' sont deux entiers premiers entre eux. Dans ces conditions, on a :

$$\begin{aligned} & d = x + y - 1 \\ \Leftrightarrow\ & d = dx' + dy' - 1 \\ \Leftrightarrow\ & d(x' + y' - 1) = 1 \end{aligned}$$

La dernière égalité entraîne $d = 1$: les entiers *x* et *y* sont premiers entre eux et on a finalement :

$$\begin{aligned} & d = x + y - 1 \\ \Leftrightarrow\ & 1 = x + y - 1 \\ \Leftrightarrow\ & y = 2 - x \end{aligned}$$

En définitive, on cherche les entiers *x* tels que *x* et $2 - x$ soient premiers entre eux.

Notons que les entiers *x* et $2 - x$ sont de même parité. Ils doivent donc nécessairement être impairs car s'ils étaient pairs, ils ne seraient pas premiers entre eux. On peut donc poser $x = 2k + 1$ avec $k \in \mathbb{Z}$. Il vient alors : $2 - x = 2 - (2k + 1) = -2k + 1$. On a alors :

$$\begin{aligned} \text{pgcd}(x, 2 - x) &= \text{pgcd}(2k + 1, -2k + 1) \\ &= \text{pgcd}(2k + 1, -(2k + 1) + 2) \\ &= \text{pgcd}(2k + 1, 2) \\ &= 1 \end{aligned}$$

Les deux entiers *x* et $y = 2 - x$ sont bien premiers entre eux.

Finalement, les couples solutions de l'équation proposée sont de la forme $(x\,; 2 - x)$ où *x* est un entier impair.

Résultat final

L'équation $\text{pgcd}(x, y) = x + y - 1$ admet pour ensemble de solutions :

$$\mathscr{S} = \{(x\,;2-x) \,/\, x = 2k+1,\, k \in \mathbb{Z}\}$$