Soit n un entier naturel.
On écrit : $n = 10a + b$, où a et b sont deux entiers naturels.

1. Montrer que 23 divise n si, et seulement si, 23 divise $a + 7b$.
2. Les entiers suivants sont-ils divisibles par 23 ?

975, 1 771, 27 930, 107 387 et 8 941 779

Analyse

Pour la première question, il convient de faire apparaître $a + 7b$ dans l'écriture $10a + b$.

Résolution

Question 1.

On a : $n = 10a + b = 10(a + 7b) - 69b = 10(a + 7b) - 23 \times 3b$.

On a alors, classiquement :

- Si 23 divise $a + 7b$, on a : $a + 7b = 23k$ où k est un entier naturel.
  Puis : $n = 10(a + 7b) - 23 \times 3b = 10 \times 23k - 23 \times 3b = 23(10k - 3b)$.
  23 divise bien n.
- Si 23 divise n, on a : $n = 23k$ où k est un entier naturel.
  Puis : $n = 23k = 10(a + 7b) - 23 \times 3b$, d'où : $10(a + 7b) = 23k + 23 \times 3b = 23(k + 3b)$.
  23 divise donc $10(a + 7b)$ et comme 23 et 10 sont premiers entre eux, on en déduit finalement que 23 divise bien $a + 7b$.

23 divise n si, et seulement si, 23 divise $a + 7b$.

Question 2.

Le résultat de la question précédente nous fournit en fait une démarche itérative pour déterminer si un entier naturel est diviseble par 23.

A partir d'un entier initial $n = 10a + b$, on évalue $a + 7b$ qui permet, en général d'obtenir un entier plus petit que *n*. Le cas échéant, si n est encore « grand », on recommence.

Par exemple, avec $n = 975$, on a : $a = 97$, $b = 5$ et $a + 7b = 97 + 7 \times 5 = 97 + 35 = 132$.
Puis, avec $n = 132$, on a : $a = 13$, $b = 2$ et $a + 7b = 13 + 7 \times 2 = 13 + 14 = 27$.
27 n'étant pas divisible par 23, on en déduit alors que 975 n'est pas divisible par 23.

Avec $n = 1\,771$, on a : $a = 177$, $b = 1$ et $a + 7b = 177 + 7 \times 1 = 177 + 7 = 184$.
Puis, avec $n = 184$, on a : $a = 18$, $b = 4$ et $a + 7b = 18 + 7 \times 4 = 18 + 28 = 46$.
Or, $46 = 2 \times 23$.
Comme 23 divise 46, on en déduit alors que 23 divise 1771.
On a en fait : $1\,771 = 23 \times 77$.

Avec $n = 27\,930$, on a : $a = 2\,793$, $b = 0$ et $a + 7b = 2\,793 + 7 \times 0 = 2\,793 + 0 = 2\,793$.
Puis, avec $n = 2\,793$, on a : $a = 279$, $b = 3$ et $a + 7b = 279 + 7 \times 3 = 279 + 21 = 300$.
Puis, avec $n = 300$, on a : $a = 30$, $b = 0$ et $a + 7b = 30 + 7 \times 0 = 30 + 0 = 30$.
30 n'étant pas divisible par 23, on en déduit alors que 27 930 n'est pas divisible par 23.

Avec $n = 107\,387$, on a : $a = 10\,738$, $b = 7$ et $a + 7b = 10\,738 + 7 \times 7 = 10\,738 + 49 = 10\,787$.
Puis, avec $n = 10\,787$, on a : $a = 1\,078$, $b = 7$ et $a + 7b = 1\,078 + 7 \times 7 = 1\,078 + 49 = 1127$.
Puis, avec $n = 1127$, on a : $a = 112$, $b = 7$ et $a + 7b = 112 + 7 \times 7 = 112 + 49 = 161$.
Puis, avec $n = 161$, on a : $a = 16$, $b = 1$ et $a + 7b = 16 + 7 \times 1 = 16 + 7 = 23$.
Comme 23 divise 23, on en déduit alors que 23 divise 107 287.
On a en fait : $107\,387 = 23 \times 4\,669$.

Avec $n = 8\,941\,779$, on a : $a = 894\,177$, $b = 9$ et
$a + 7b = 894\,177 + 7 \times 9 = 894\,177 + 63 = 894\,240$.
Puis, avec $n = 894\,240$, on a : $a = 89\,424$, $b = 0$ et
$a + 7b = 89\,424 + 7 \times 0 = 89\,424 + 0 = 89\,424$.
Puis, avec $n = 89\,424$, on a : $a = 8\,942$, $b = 4$ et $a + 7b = 8\,942 + 7 \times 4 = 8\,942 + 28 = 8\,970$.
Puis, avec $n = 8\,970$, on a : $a = 897$, $b = 0$ et $a + 7b = 897 + 7 \times 0 = 897 + 0 = 897$.
Puis, avec $n = 897$, on a : $a = 89$, $b = 7$ et $a + 7b = 89 + 7 \times 7 = 89 + 49 = 138$.
Puis, avec $n = 138$, on a : $a = 13$, $b = 8$ et $a + 7b = 13 + 7 \times 8 = 13 + 56 = 69$.
Comme 23 divise 69, on en déduit alors que 23 divise 8 941 779.
On a en fait : $8\,941\,779 = 23 \times 388\,773$.

975 et 27 930 ne sont pas divisibles par 23.
1 771, 107 387 et 8 941 779 sont divisibles par 23.