1. Déterminer le plus petit entier naturel non nul $n_0$ tel que $3^{n_0}$ soit congru à 1 modulo 11.
2. Résoudre dans $\mathbb{N}$ l'équation $3^n \equiv 1 \ (11)$.
   Indication : on considèrera la division euclidienne de $n$ par $n_0$.

## Analyse

Quelques propriétés des congruences sont mises en œuvre pour obtenir ce joli résultat. On notera, encore une fois, l'utilisation déterminante de la division euclidienne.

## Résolution

### *Question 1.*

Comme $3^2 = 9 < 11$, on commence par $3^3 = 27 = 2\times 11 + 5 \equiv 5 \ (11)$.

On a ensuite : $3^4 = 81 = 7\times 11 + 4 \equiv 4 \ (11)$.

Puis : $3^5 = 243 = 22\times 11 + 1 \equiv 1 \ (11)$.

On en déduit immédiatement : $n_0 = 5$.

Le plus petit entier $n_0$ tel que $3^{n_0} \equiv 1 \ (11)$ est $n_0 = 5$.

### *Question 2.*

On a, comme suggéré : $n = q\times n_0 + r = 5q + r$ avec $0 \le r < 5$.

Alors : $3^n \equiv 1 \ (11) \Leftrightarrow 3^{5q+r} \equiv 1 \ (11) \Leftrightarrow 3^{5q}\times 3^r \equiv 1 \ (11)$.

Mais comme $3^5 \equiv 1 \ (11)$, on a, pour tout entier naturel $q$ : $\left(3^5\right)^q \equiv 1^q \ (11)$, soit : $3^{5q} \equiv 1 \ (11)$.

On en tire alors, pour tout $r$ entier naturel, et à fortiori vérifiant $0 \le r < 5$ :

$3^{5q}\times 3^r \equiv 1\times 3^r \ (11)$. D'où : $3^n \equiv 3^r \ (11)$.

En définitive : $3^n \equiv 1 \ (11) \Leftrightarrow 3^r \equiv 1 \ (11)$ où $r$ est le reste de la division euclidienne de $n$ par 5.

Mais d'après la première question, pour $r$ tel que $0 \leq r < 5$, on a $3^r \equiv 1 \ (11) \Leftrightarrow r = 0$.
D'où $3^n \equiv 1 \ (11) \Leftrightarrow 3^r \equiv 1 \ (11) \Leftrightarrow r = 0 \Leftrightarrow 5 | n$.
Finalement :

On a $3^n \equiv 1 \ (11)$ si, et seulement si, $n$ est un multiple de 5.