Dire, en justifiant, si chacune des écritures suivantes est celle d'une division euclidienne (le cas échéant, on précisera laquelle) :

1. $213 = 13 \times 15 + 18$.
2. $366 = 29 \times 12 + 18$.
3. $-188 = -13 \times 15 + 7$.
4. $-202 = -13 \times 15 - 7$.
5. $-181 = 13 \times (-15) + 14$.
6. $-209 = 13 \times (-15) - 14$.

Analyse

Rappelons que la division euclidienne d'un entier a par un entier b (non nul) correspond à l'égalité (unique) $a = q \times b + r$ avec $0 \leq r < |b|$.

Résolution

1^er^ cas

18 est supérieur à 13 et à 15. L'écriture proposée ne peut donc être la division enclidienne de 213 par 13 ou par 15.
On a : $213 = 13 \times 15 + 18 = 13 \times 15 + 13 + 5 = 13 \times 16 + 5$. Donc, dans la division euclidienne de 213 par 13 le quotient est égal à 16 et le reste à 5.
On a aussi : $213 = 13 \times 15 + 18 = 13 \times 15 + 15 + 3 = 14 \times 15 + 3$. Donc, dans la division euclidienne de 213 par 15 le quotient est égal à 14 et le reste à 3.

2^ème^ cas

18 est supérieur à 12 mais on a ici : $0 \leq 18 < 29$. On en conclut immédiatement que l'écriture proposée est celle de la division euclidienne de 366 par 29, le quotient et le reste valant respectivement 12 et 18.

3ème cas

On a : $0 \leq 7 < |-13|$ et $0 \leq 7 < 15$. L'écriture proposée correspond donc :

- Soit à la division euclidienne de -188 par -13, le quotient et le reste valant respectivement 15 et 7.
- Soit à la division euclidienne de -188 par 15, le quotient et le reste valant respectivement -13 et 7.

4ème cas

Comme -7 est strictement négatif, l'écriture proposée ne peut correspondre à une quelconque division euclidienne.
Pour ce qui est de la division euclidienne de -202 par -13, on a, en repartant de l'égalité fournie : $-202 = 15\times(-13) - 7 = 15\times(-13) + (-13) + 6 = 16\times(-13) + 6$. Ainsi, dans la division euclidienne de -202 par -13, le quotient est égal à 16 et le reste à 6.
Pour ce qui est de la division euclidienne de -202 par 15, on a, en repartant de l'égalité fournie : $-202 = -13\times 15 - 7 = -13\times 15 - 15 + 8 = -14\times 15 + 8$. Ainsi, dans la division euclidienne de -202 par 15, le quotient est égal à -14 et le reste à 8.

5ème cas

14 est supérieur à 13 mais on a $0 \leq 14 < |-15|$. On en déduit que l'écriture proposée correspond à la division euclidienne de -181 par -15, le quotient et le reste valant respectivement 13 et 14.

6ème cas

Comme -14 est strictement négatif, l'écriture proposée ne peut correspondre à une quelconque division euclidienne.
Pour ce qui est de la division euclidienne de -209 par -15, on a, en repartant de l'égalité fournie : $-209 = 13\times(-15) - 14 = 13\times(-15) - 15 + 1 = 14\times(-15) + 1$. Ainsi, dans la division euclidienne de -209 par -15, le quotient est égal à 14 et le reste à 1.
Pour ce qui est de la division euclidienne de -209 par 13, on a, en repartant de l'égalité fournie :
$-209 = (-15)\times 13 - 14 = (-15)\times 13 - 26 + 12 = (-15)\times 13 + (-2)\times 13 + 12 = (-17)\times 13 + 12$.
Ainsi, dans la division euclidienne de -209 par 13, le quotient est égal à -17 et le reste à 12.